

反復法

■ 電卓を用いて立方根の近似値を求める

$\sqrt{\quad}$ キーのある電卓を用い、同じ計算を繰り返すことによって、ある数の立方根(3乗根)の近似値を求めることができる。

例 $\sqrt[3]{2}$ の近似値

(1) 初期値 x_1 として $\sqrt[3]{2}$ に近い値をとる。 $1 < \sqrt[3]{2} < 2$ だから、ここでは $x_1 = 1$ としておく。

(2) x_1 を 2 倍し、 $\sqrt{\quad}$ を 2 回とって x_2 とする。すなわち

$$x_2 = \sqrt{\sqrt{2x_1}} = 1.1892071 \quad (\text{8桁の電卓を用いた})$$

(3) x_2 を 2 倍し、 $\sqrt{\quad}$ を 2 回とって x_3 とする。以下、これを繰り返す。

実際に手元の電卓では

$$x_{13} = 1.2599210$$

で一定となった。

解説 右図のように、 $y = \sqrt{\sqrt{2x}}$ と $y = x$ との $x > 0$ における解は $x = \sqrt[3]{2}$ である。

漸化式

$$x_{n+1} = \sqrt{\sqrt{2x_n}}$$

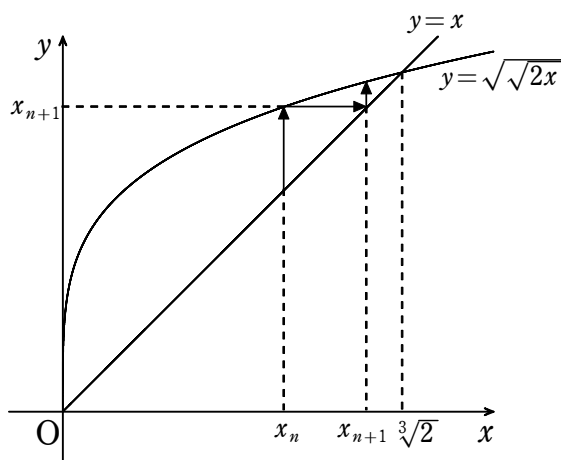
において、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $x_n \rightarrow \sqrt[3]{2}$

となることを用いている。

一般に $A > 0$ のとき、 $\sqrt[3]{A}$ の近似値は

$$x_{n+1} = \sqrt{\sqrt{Ax_n}}$$

から求められる。



■ 平方根の近似値

$A > 0$ のとき $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{x_n} + x_n \right)$ において

$n \rightarrow \infty$ のとき、 $x_n \rightarrow \sqrt{A}$ である。

(この漸化式はニュートン法から得られる)

例 $\sqrt{2}$ の近似値 $A = 2$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{x_1} + x_1 \right) = 1.5$$

.....

$$x_5 = 1.41421356$$

