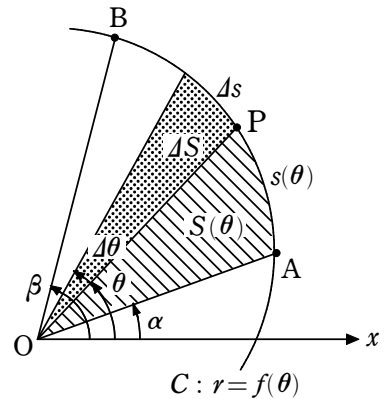


極方程式と面積・曲線の長さ

右図において、極方程式 $r=f(\theta)$ で表された曲線を C 、偏角が α, β ($0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$) である C 上の点をそれぞれ A, B とする。 C と OA, OB で囲まれた部分の面積を S 、 A から B までの曲線の長さを s とするとき

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta \quad s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$



解説 偏角が θ ($\alpha \leq \theta \leq \beta$) である C 上の点を P とし、 C と OA, OP で囲まれた部分の面積を $S(\theta)$ とすると

$$S(\alpha) = 0, \quad S(\beta) = S$$

θ を $\Delta\theta$ だけ増加したとき、 $S(\theta)$ 、 r の増分をそれぞれ ΔS 、 Δr とすると

$$\Delta S = S(\theta + \Delta\theta) - S(\theta), \quad \Delta r = f(\theta + \Delta\theta) - f(\theta)$$

である。

$$\Delta S \doteq \frac{1}{2} r(r + \Delta r) \sin \Delta\theta$$

において、近似式 $\sin \Delta\theta \doteq \Delta\theta$ を使い、微少量について1次の項までとると

$$\Delta S \doteq \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta \quad \text{ゆえに} \quad S'(\theta) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta\theta} = \frac{1}{2} r^2$$

したがって

$$S = S(\beta) - S(\alpha) = \left[S(\theta) \right]_{\alpha}^{\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} S'(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$$

次に、 A から P までの曲線の長さを $s(\theta)$ とすると

$$s(\alpha) = 0, \quad s(\beta) = s$$

θ を $\Delta\theta$ だけ増加したときの $s(\theta)$ の増分を Δs とすると、余弦定理を用いて

$$(\Delta s)^2 \doteq r^2 + (r + \Delta r)^2 - 2r(r + \Delta r) \cos \Delta\theta$$

近似式 $\cos \Delta\theta \doteq 1 - \frac{1}{2}(\Delta\theta)^2$ を使い、微少量について2次の項までとると

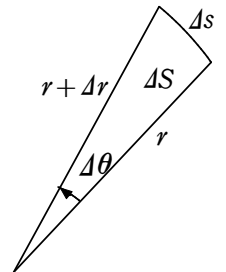
$$(\Delta s)^2 \doteq r^2 (\Delta\theta)^2 + (\Delta r)^2 \quad \text{より} \quad \left(\frac{\Delta s}{\Delta\theta}\right)^2 \doteq r^2 + \left(\frac{\Delta r}{\Delta\theta}\right)^2$$

$\Delta\theta \rightarrow 0$ のとき、 $\left(\frac{\Delta s}{\Delta\theta}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2$ 、 $\left(\frac{\Delta r}{\Delta\theta}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$ であり、 $s(\theta)$ が増加関数であることを

$$\text{考慮すると} \quad \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

したがって

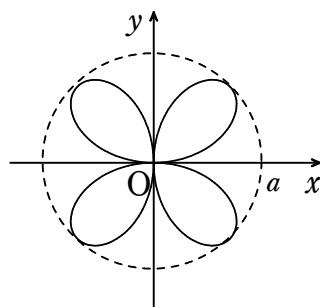
$$s = s(\beta) - s(\alpha) = \left[s(\theta) \right]_{\alpha}^{\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{ds}{d\theta} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$



例1 正葉曲線(ばら曲線) $r = a \sin 2\theta$ ($a > 0$) ($0 \leq \theta < 2\pi$)

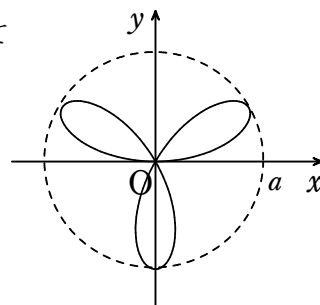
1つのループで囲まれた部分の面積を $\frac{S}{4}$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{S}{4} &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 2\theta d\theta \\ &= \frac{a^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\theta) d\theta = \frac{a^2}{4} \left[\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{8} \end{aligned}$$



正葉曲線 $r = a \sin 3\theta$ ($a > 0$) ($0 \leq \theta < \pi$) についても、同様にして

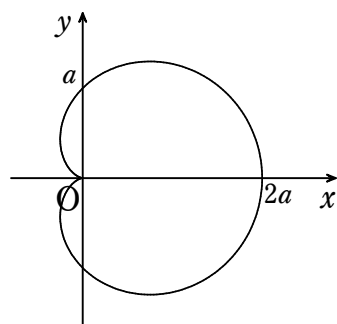
$$\frac{S}{3} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} a^2 \sin^2 3\theta d\theta = \frac{a^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 6\theta) d\theta = \frac{\pi a^2}{12}$$



例2 カーゴイド(心臓形) $r = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$) ($0 \leq \theta < 2\pi$)

曲線で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} r^2 &= a^2 (1 + \cos \theta)^2 = a^2 \left(1 + 2\cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) \\ &= a^2 \left(\frac{3}{2} + 2\cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) \quad \text{より} \\ S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \left[\frac{3}{2} \theta + 2\sin \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi a^2}{2} \end{aligned}$$



閉曲線の長さを s とすると

$$\begin{aligned} r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 &= a^2 (1 + \cos \theta)^2 + (-a \sin \theta)^2 = 2a^2 (1 + \cos \theta) = 4a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad \text{より} \\ s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} 2a \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta \\ &= 2a \cdot 2 \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 4a \left[2 \sin \frac{\theta}{2} \right]_0^{\pi} = 8a \end{aligned}$$

例3 レムニスケート(連珠形) $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ ($a > 0$) ($-\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{4}$)

1つのループで囲まれた部分の面積を $\frac{S}{2}$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2a^2 \cos 2\theta d\theta \\ &= a^2 \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = a^2 \end{aligned}$$

