

問題1 $\triangle ABC$ において、辺 BC の中点を M とする。 A と M を除いた線分 AM 上に点 P をとり、直線 CP と辺 AB の交点を D 、直線 BP と辺 AC の交点を E とするとき、 $DE \parallel BC$ であることを証明せよ。

問題2 $\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形で $\angle A > 60^\circ$ とする。辺 BC 上に点 D を $AD=BD$ となるようにとる。辺 AC の中点を M とし、 $\angle DAC$ の二等分線と DM の交点を E 、 CE と AD の交点を F とする。このとき、 BF は $\angle ABC$ を二等分することを証明せよ。

チェバの定理を用いる証明問題

問題1 $\triangle ABC$ において、辺 BC の中点を M とする。 A と M を除いた線分 AM 上に点 P をとり、直線 CP と辺 AB の交点を D 、直線 BP と辺 AC の交点を E とするとき、 $DE \parallel BC$ であることを証明せよ。

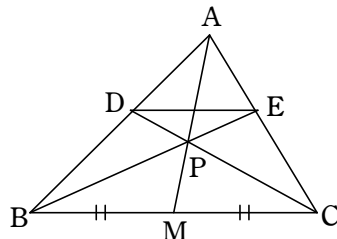
証明 チェバの定理により

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1$$

M は BC の中点であるから $\frac{BM}{MC} = 1$ ゆえに

$$\frac{CE}{EA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1 \quad \text{より} \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

したがって $DE \parallel BC$ である。 (証明終)



参考 線分 AM の延長上に点 P をとり、辺 AC 、 AB の延長との交点を D 、 E としても、 $DE \parallel BC$ が成り立ちます。

問題2 $\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形で $\angle A > 60^\circ$ とする。辺 BC 上に点 D を $AD=BD$ となるようにとる。辺 AC の中点を M とし、 $\angle DAC$ の二等分線と DM の交点を E 、 CE と AD の交点を F とする。このとき、 BF は $\angle ABC$ を二等分することを証明せよ。

証明 $\angle DAC$ の二等分線と DC の交点を L とすると

$$DL : LC = AD : AC$$

仮定より $AD=BD$ 、 $AC=BA$ であるから

$$\frac{DL}{LC} = \frac{BD}{BA} \quad \dots\dots ①$$

また、チェバの定理により

$$\frac{DL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AF}{FD} = 1$$

これに $CM=MA$ および ① を用いると

$$\frac{AF}{FD} = \frac{LC}{DL} = \frac{BA}{BD}$$

したがって、 BF は $\angle ABC$ を二等分する。 (証明終)

