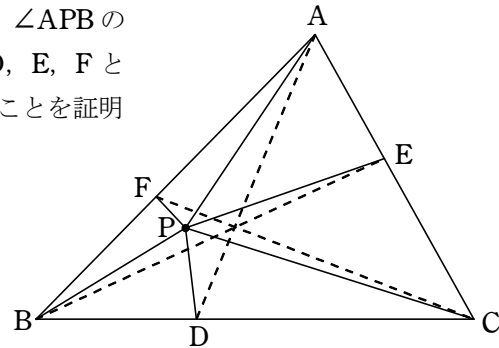


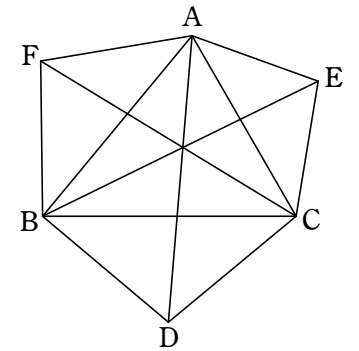
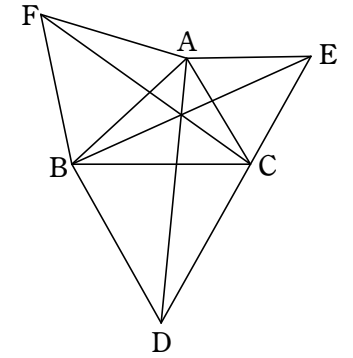
問題1 $\triangle ABC$ の内接円と辺 BC , CA , AB との接点をそれぞれ D , E , F とするとき, 線分 AD , BE , CF は1点で交わることを証明せよ。(刈屋の定理の特別な場合)

問題2 $\triangle ABC$ の内部に点 P をとり, $\angle BPC$, $\angle CPA$, $\angle APB$ の二等分線がそれぞれ辺 BC , CA , AB と交わる点を D , E , F とする。このとき, 線分 AD , BE , CF は1点で交わることを証明せよ。



問題3 $\triangle ABC$ の外側に辺 BC , CA , AB をそれぞれ1辺とする正三角形 BDC , CEA , AFB をつくるとき, 線分 AD , BE , CF は1点で交わることを証明せよ。

問題4 $\triangle ABC$ の外側に辺 BC , CA , AB をそれぞれ底辺とする相似な二等辺三角形 BDC , CEA , AFB をつくるとき, 線分 AD , BE , CF は1点で交わることを証明せよ。



チェバの定理の逆を用いる証明問題

問題1 $\triangle ABC$ の内接円と辺 BC, CA, AB との接点をそれぞれ D, E, F とするとき、線分 AD, BE, CF は1点で交わることを証明せよ。(刈屋の定理の特別な場合)

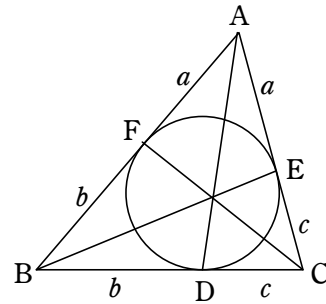
証明 円外の点から円にひいた接線の長さは等しいから

$$AF=AE=a, BD=BF=b, CE=CD=c$$

とおくことができる。ここで

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$$

であるから、チェバの定理の逆により AD, BE, CF は1点で交わる。(証明終)



参考 D, E, F を3つの傍接円と辺との接点としても同様のことが成り立つ。

問題2 $\triangle ABC$ の内部に点 P をとり、 $\angle BPC, \angle CPA, \angle APB$ の二等分線がそれぞれ辺 BC, CA, AB と交わる点を D, E, F とする。このとき、線分 AD, BE, CF は1点で交わることを証明せよ。

証明 PD は $\angle BPC$ の二等分線であるから

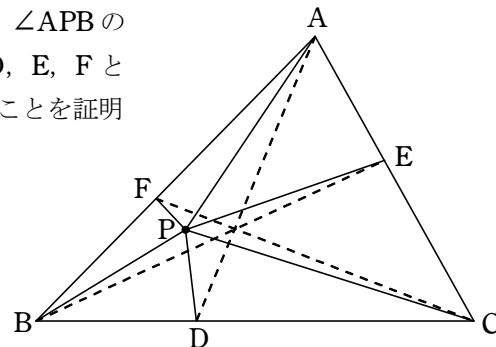
$$BD : DC = PB : PC$$

同様に $CE : EA = PC : PA, AF : FB = PA : PB$

したがって

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{PB}{PC} \cdot \frac{PC}{PA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$$

であるから、チェバの定理の逆により AD, BE, CF は1点で交わる。(証明終)



参考 P が $\triangle ABC$ の外部にあっても同様のことが成り立つ。

問題3 $\triangle ABC$ の外側に辺 BC, CA, AB をそれぞれ1辺とする正三角形 BDC, CEA, AFB をつくる時、線分 AD, BE, CF は1点で交わることを証明せよ。

証明 $\triangle AFC$ と $\triangle ABE$ は、2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから $\triangle AFC \equiv \triangle ABE$ ゆえに面積も等しく

$$\triangle AFC = \triangle ABE = S_A$$

とおける。同様にして

$$\triangle BDA = \triangle BCF = S_B, \triangle CEB = \triangle CAD = S_C$$

次に、 AD と BC, BE と CA, CF と AB の交点をそれぞれ P, Q, R とする。

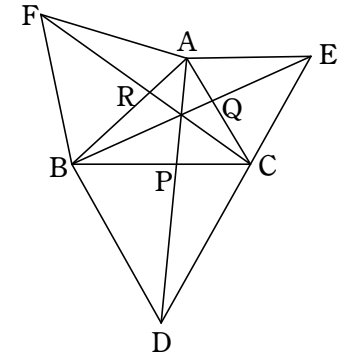
$\triangle BDA$ と $\triangle CAD$ の面積は、底辺を AD とすると、高さの比は $BP : PC$ に等しいから

$$BP : PC = \triangle BDA : \triangle CAD = S_B : S_C$$

同様にして

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{\triangle BDA}{\triangle CAD} \cdot \frac{\triangle CEB}{\triangle ABE} \cdot \frac{\triangle AFC}{\triangle BCF} = \frac{S_B}{S_C} \cdot \frac{S_C}{S_A} \cdot \frac{S_A}{S_B} = 1$$

したがって、チェバの定理の逆により AD, BE, CF は1点で交わる。(証明終)



問題4 $\triangle ABC$ の外側に辺 BC, CA, AB をそれぞれ底辺とする相似な二等辺三角形 BDC, CEA, AFB をつくる時、線分 AD, BE, CF は1点で交わることを証明せよ。

証明 AD と BC, BE と CA, CF と AB の交点をそれぞれ P, Q, R 、また、 $\angle CAB = A, \angle ABC = B, \angle BCA = C$ 、二等辺三角形の底角を α とする。

$$BP : PC = \triangle BAD : \triangle CAD = BA \cdot BD \sin(B + \alpha) : CA \cdot CD \sin(C + \alpha) = AB \sin(B + \alpha) : CA \sin(C + \alpha)$$

同様にして

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{AB \sin(B + \alpha)}{CA \sin(C + \alpha)} \cdot \frac{BC \sin(C + \alpha)}{AB \sin(A + \alpha)} \cdot \frac{CA \sin(A + \alpha)}{BC \sin(B + \alpha)} = 1$$

したがって、チェバの定理の逆により AD, BE, CF は1点で交わる。(証明終)

