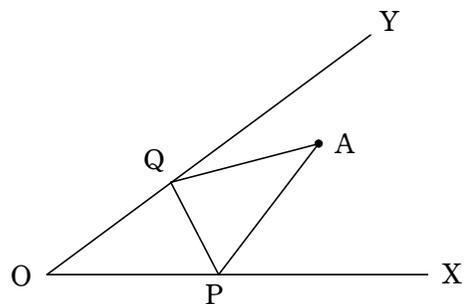
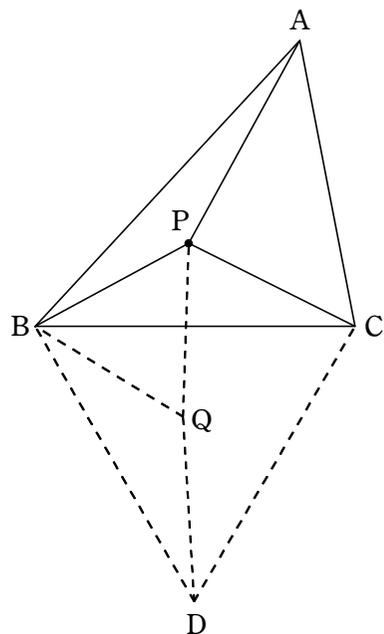


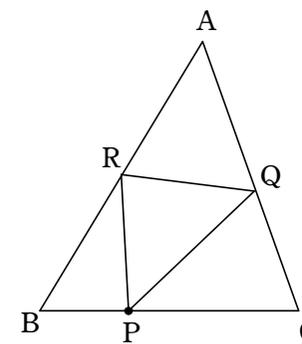
問題1 点Aは鋭角 $\angle XOY$ の内部にある。半直線 OX , OY 上にそれぞれ点 P , Q をとり、線分の長さの和 $AP+PQ+QA$ が最小になるようにしたい。点 P , Q の位置をどこにとればよいか。



問題2 鋭角三角形 ABC の内部に点 P をとり、線分の長さの和 $PA+PB+PC$ が最小になるようにしたい。点 P の位置をどこにとればよいか。
(ヒント 正三角形 BQP , BDC をつくって考える。)



問題3 鋭角三角形 ABC の頂点を除く辺 BC , CA , AB 上にそれぞれ点 P , Q , R をとり、線分の長さの和 $PQ+QR+RP$ が最小になるようにしたい。点 P , Q , R の位置をどこにとればよいか。



線分の長さの和の最小値問題

問題1 点Aは鋭角 $\angle XOY$ の内部にある。半直線OX, OY上にそれぞれ点P, Qをとり、線分の長さの和 $AP+PQ+QA$ が最小になるようにしたい。点P, Qの位置をどこにとればよいか。

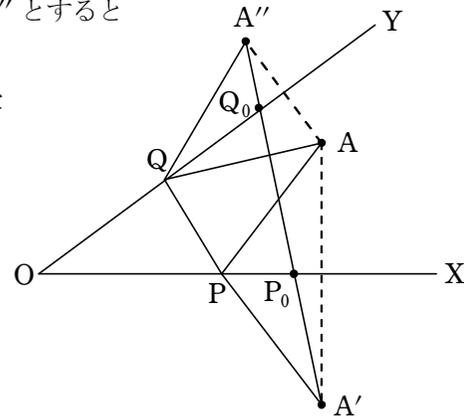
解答 OX, OYに関してAと対称な点をそれぞれ A' , A'' とすると

$$AP+PQ+QA=A'P+PQ+QA''$$

$A'A''$ とOX, OYの交点をそれぞれ P_0 , Q_0 とすると

$$A'P+PQ+QA'' \geq A'P_0+P_0Q_0+Q_0A''=A'A''$$

したがって、P, Qがそれぞれ P_0 , Q_0 と一致するとき、 $AP+PQ+QA$ が最小になり、長さの和は $A'A''$ の長さに等しい。



問題2 鋭角三角形ABCの内部に点Pをとり、線分の長さの和 $PA+PB+PC$ が最小になるようにしたい。点Pの位置をどこにとればよいか。

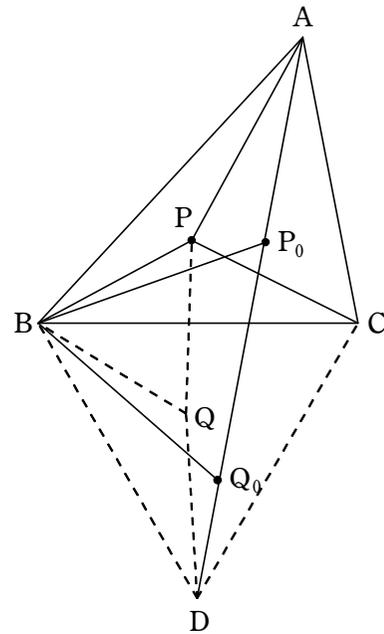
(ヒント 正三角形BQP, BDCをつくって考える。)

解答 図のように、正三角形BQP, BDCをつくると

$\triangle PBC \cong \triangle QBD$ であるから

$$PA+PB+PC=AP+PQ+QD$$

よって $\triangle BQP$ が正三角形のままP, QがAD上にあるとき、 $PA+PB+PC$ が最小となる。すなわちAD上に $\angle AP_0B=120^\circ$ となるような点 P_0 をとれば $P_0A+P_0B+P_0C$ が最小である。



発展 P_0 の作図の方法を考えてみよう。

また、 $\angle BP_0C$ も 120° となる、なぜだろうか。

問題3 鋭角三角形ABCの頂点を除く辺BC, CA, AB上にそれぞれ点P, Q, Rをとり、線分の長さの和 $PQ+QR+RP$ が最小になるようにしたい。点P, Q, Rの位置をどこにとればよいか。

解答 AC, ABに関してPと対称な点を

それぞれ P' , P'' とする。

あるPの位置について

$$PQ+QR+RP=P'Q+QR+RP''$$

であるから、Q, Rが線分 $P'P''$ 上にあるとき、 $PQ+QR+RP$ は最小となり、この長さの和は $P'P''$ に等しい。

ここで

$$\angle PAC = \angle P'AC, \angle PAB = \angle P''AB$$

より $\angle P'AP'' = 2\angle CAB$

と一定であるから、Pが辺BC上を動くとき

$P'P''$ が最小となるのは、

$$AP=AP'=AP''$$

が最小となるときである。

AからBCにひいた垂線の交点を P_0 とすると、APが最小となるのは、Pが P_0 に一致するときである。

AC, ABに関して P_0 と対称な点をそれぞれ P'_0 , P''_0 ,

$P'_0P''_0$ とAB, ACの交点をそれぞれ Q_0 , R_0 とすると、P, Q, Rがそれぞれ P_0 , Q_0 , R_0 に一致するとき、 $PQ+QR+RP$ が最小となる。

