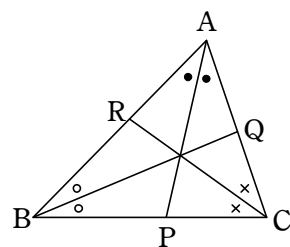
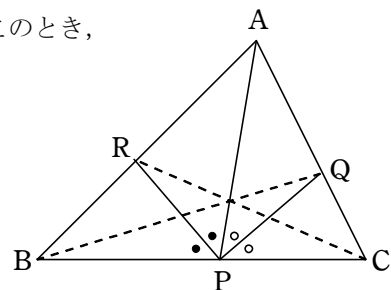


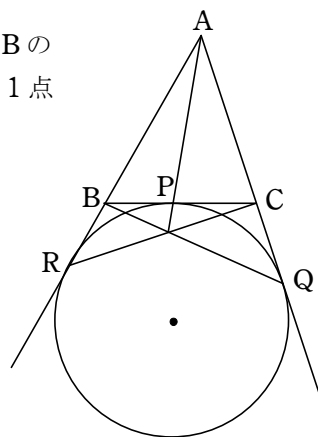
問題1 $\triangle ABC$ において、 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ の二等分線と対辺との交点をそれぞれ P , Q , R とするとき、線分 AP , BQ , CR は1点で交わることを証明せよ。(内心の定理)



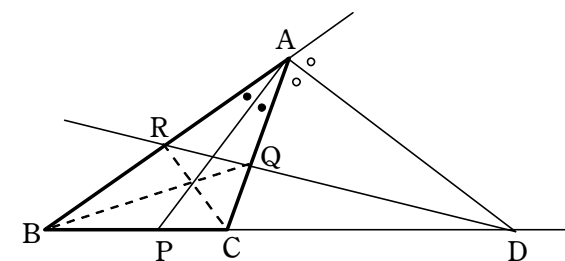
問題2 $\triangle ABC$ の辺 BC 上に点 P をとり、 $\angle APB$ の二等分線と辺 AB の交点を R , $\angle APC$ の二等分線と辺 AC の交点を Q とする。このとき、線分 AP , BQ , CR は1点で交わることを証明せよ。



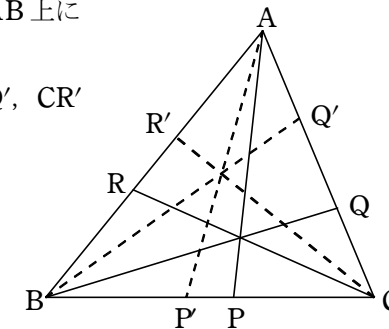
問題3 $\triangle ABC$ の $\angle A$ 内の傍接円が辺 BC に接する点を P , 辺 AC , AB の延長に接する点をそれぞれ Q , R とするとき、直線 AP , BQ , CR は1点で交わることを証明せよ。



問題4 $\triangle ABC$ の $\angle A$ の内角と外角の二等分線と BC との交点をそれぞれ P , D とし、 D を通る直線と辺 AB , AC との交点をそれぞれ R , Q とするとき、線分 AP , BQ , CR は1点で交わることを証明せよ。



問題5 $\triangle ABC$ の辺 BC 上に点 P , P' を, CA 上に Q , Q' を, AB 上に R , R' を $BP=CP'$, $CQ=AQ'$, $AR=BR'$ となるようにとる。3直線 AP , BQ , CR が1点で交わるならば, 3直線 AP' , BQ' , CR' も1点で交わることを証明せよ。(等距離共役点)



チェバの定理の逆を用いる証明その2

問題1 $\triangle ABC$ において、 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ の二等分線と対辺との交点をそれぞれP, Q, Rとするとき、線分AP, BQ, CRは1点で交わることを証明せよ。(内心の定理)

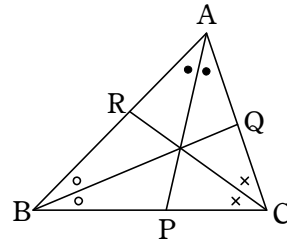
証明 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ とおく。

AP, BQ, CRはそれぞれ $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ の二等分線だから

$$BP : PC = c : b, \quad CQ : QA = a : c, \quad AR : RB = b : a$$

$$\text{よって } \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

チェバの定理の逆により、AP, BQ, CRは1点で交わる。(証明終)



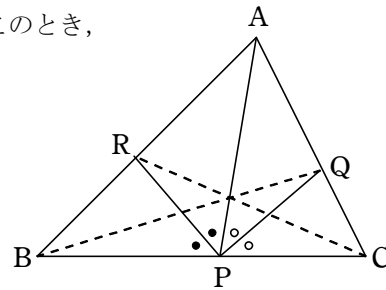
問題2 $\triangle ABC$ の辺BC上に点Pをとり、 $\angle APB$ の二等分線と辺ABの交点をR、 $\angle APC$ の二等分線と辺ACの交点をQとする。このとき、線分AP, BQ, CRは1点で交わることを証明せよ。

証明 PRは $\angle APB$ の二等分線であるから $AR : RB = AP : BP$

PQは $\angle APC$ の二等分線であるから $AQ : QC = AP : CP$

$$\text{よって } \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{BP}{CP} \cdot \frac{CP}{AP} \cdot \frac{AP}{BP} = 1$$

チェバの定理の逆により、AP, BQ, CRは1点で交わる。(証明終)

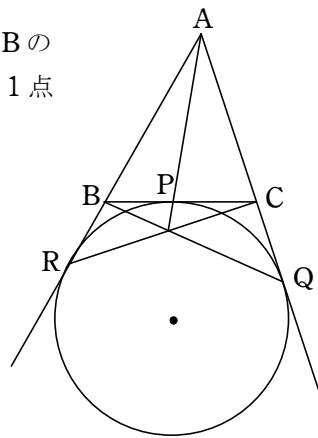


問題3 $\triangle ABC$ の $\angle A$ 内の傍接円が辺BCに接する点をP、辺AC, ABの延長に接する点をそれぞれQ, Rとするとき、直線AP, BQ, CRは1点で交わることを証明せよ。

証明 $AQ=AR=a$, $BP=BR=b$, $CP=CQ=c$ とおくと

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$$

チェバの定理の逆により、AP, BQ, CRは1点で交わる。(証明終)



問題4 $\triangle ABC$ の $\angle A$ の内角と外角の二等分線とBCとの交点をそれぞれP, Dとし、Dを通る直線と辺AB, ACとの交点をそれぞれR, Qとするとき、線分AP, BQ, CRは1点で交わることを証明せよ。

証明 AP, ADはそれぞれ $\angle A$ の内角と外角の二等分線であるから

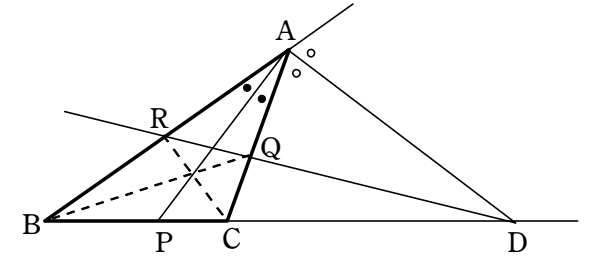
$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

また、 $\triangle ABC$ とQRにメネラウスの定理を用いて

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1 \quad \text{から} \quad \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{DC}{BD} = \frac{AC}{AB}$$

$$\text{ゆえに } \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1$$

チェバの定理の逆により、AP, BQ, CRは1点で交わる。(証明終)



問題5 $\triangle ABC$ の辺BC上に点P, P'を、CA上にQ, Q'を、AB上にR, R'を $BP=CP'$, $CQ=AQ'$, $AR=BR'$ となるようにとる。3直線AP, BQ, CRが1点で交わるならば、3直線AP', BQ', CR'も1点で交わることを証明せよ。(等距離共役点)

証明 3つの直線AP, BQ, CRが1点で交わるから、チェバの定理により

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

仮定より $BP=CP'$, $CQ=AQ'$, $AR=BR'$ また $PC=P'B$, $QA=Q'C$, $RB=R'A$

$$\text{よって } \frac{CP'}{P'B} \cdot \frac{AQ'}{Q'C} \cdot \frac{BR'}{R'A} = 1 \quad \text{逆数をとって } \frac{BP'}{P'C} \cdot \frac{CQ'}{Q'A} \cdot \frac{AR'}{R'B} = 1$$

チェバの定理の逆により3つの直線AP', BQ', CR'は1点で交わる。

