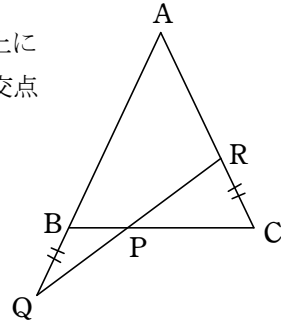
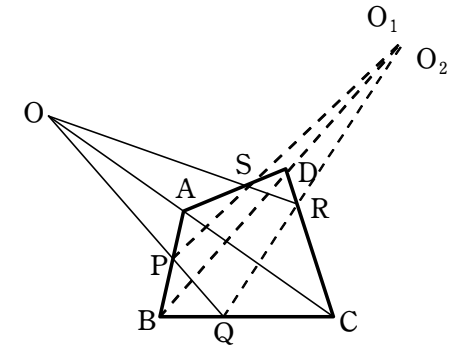


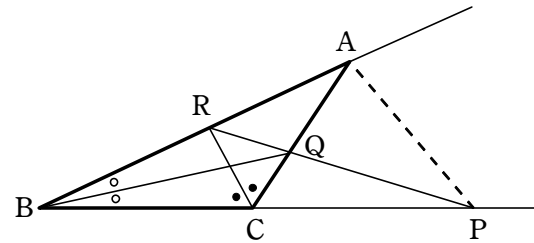
問題1 $AB=AC$ の二等辺三角形 ABC がある。辺 AB の B をこえた延長上に点 Q を、辺 AC 上に点 R を $BQ=CR$ となるようにとる。 QR と BC の交点を P とするとき、 P は QR の中点となることを証明せよ。



問題3 四角形 $ABCD$ の辺 AB, BC, CD, DA 上にそれぞれ点 P, Q, R, S をとる。3直線 AC, PQ, SR が1点 O で交わるならば、3直線 BD, PS, QR も1点で交わることを証明せよ。

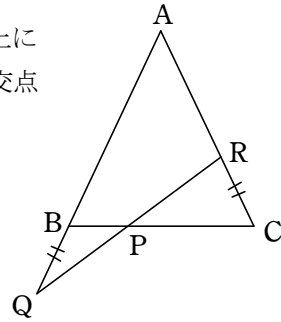


問題2 $AB \neq AC$ である $\triangle ABC$ において、 $\angle B, \angle C$ の二等分線と対辺 CA, AB との交点をそれぞれ Q, R とする。 QR と BC との交点を P とするとき、 AP は $\angle A$ の外角を二等分することを証明せよ。



メネラウスの定理を用いる証明問題

問題1 AB=AC の二等辺三角形 ABC がある。辺 AB の B をこえた延長上に点 Q を、辺 AC 上に点 R を BQ=CR となるようにとる。QR と BC の交点を P とするとき、P は QR の中点となることを証明せよ。

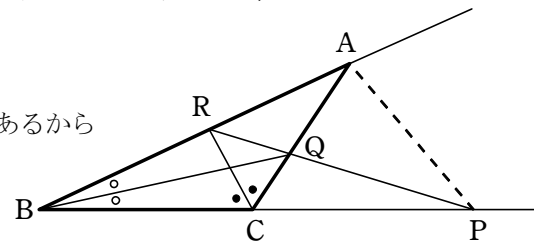


証明 $\triangle AQR$ と直線 BC について、メネラウスの定理を用いると

$$\frac{QP}{PR} \cdot \frac{RC}{CA} \cdot \frac{AB}{BQ} = 1$$

$$\frac{RC}{BQ} = 1, \frac{AB}{AC} = 1 \text{ であるから } \frac{QP}{PR} = 1 \text{ すなわち } QP=PR \text{ (証明終)}$$

問題2 $AB \neq AC$ である $\triangle ABC$ において、 $\angle B$ 、 $\angle C$ の二等分線と対辺 CA, AB との交点をそれぞれ Q, R とする。QR と BC との交点を P とするとき、AP は $\angle A$ の外角を二等分することを証明せよ。



証明 BQ, CR はそれぞれ $\angle B$ 、 $\angle C$ の二等分線であるから

$$CQ : QA = BC : BA,$$

$$AR : RB = CA : CB$$

$\triangle ABC$ と直線 QR について、メネラウスの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1 \text{ より } \frac{BP}{PC} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot \frac{CA}{CB} = 1$$

$$\text{ゆえに } \frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}$$

角の二等分線の定理の逆により、AP は $\angle A$ の外角を二等分する。 (証明終)

参考 $\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}$ ならば $\angle EAP = \angle CAP$ の証明

辺 AB 上に点 D を $AD=AC$ となるようにとると

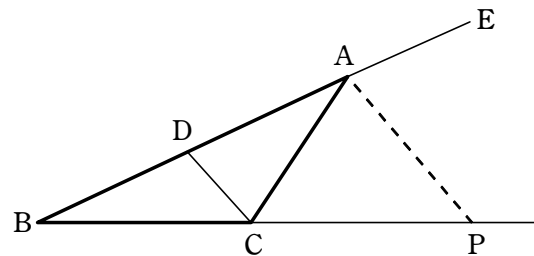
$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC} \text{ より } \frac{BP}{PC} = \frac{BA}{AD}$$

であるから $DC \parallel AP$ ゆえに

$$\angle EAP = \angle ADC, \angle CAP = \angle ACD$$

$\triangle ADC$ は $AD=AC$ の二等辺三角形であるから $\angle ADC = \angle ACD$ したがって

$$\angle EAP = \angle CAP$$



問題3 四角形 ABCD の辺 AB, BC, CD, DA 上にそれぞれ点 P, Q, R, S をとる。3 直線 AC, PQ, SR が 1 点 O で交わるならば、3 直線 BD, PS, QR も 1 点で交わることを証明せよ。

証明 $\triangle ABC$ と PQ, $\triangle ACD$ と SR にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CO}{OA} = 1, \frac{AS}{SD} \cdot \frac{DR}{RC} \cdot \frac{CO}{OA} = 1$$

$$\text{ゆえに } \frac{CO}{OA} = \frac{PB}{AP} \cdot \frac{QC}{BQ} = \frac{SD}{AS} \cdot \frac{RC}{DR} \text{ より}$$

$$\frac{PB}{AP} \cdot \frac{AS}{SD} = \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{RC}{DR} \text{ ①}$$

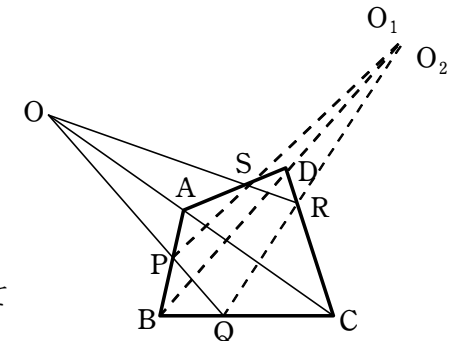
BD と PS の交点を O_1 、BD と QR の交点を O_2 とすると

$\triangle ABD$ と PS, $\triangle BCD$ と QR にメネラウスの定理を用いて

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BO_1}{O_1D} \cdot \frac{DS}{SA} = 1, \frac{CQ}{QB} \cdot \frac{BO_2}{O_2D} \cdot \frac{DR}{RC} = 1$$

$$\text{ここで } \frac{BO_1}{O_1D} = \frac{PB}{AP} \cdot \frac{AS}{SD}, \frac{BO_2}{O_2D} = \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{RC}{DR} \text{ であるから } \frac{BO_1}{O_1D} = \frac{BO_2}{O_2D}$$

したがって O_1 と O_2 は一致する。すなわち、D, PS, QR も 1 点で交わる。 (証明終)



参考 $\triangle APS$ と $\triangle CRQ$ についてのデザルグの定理と同じものである。