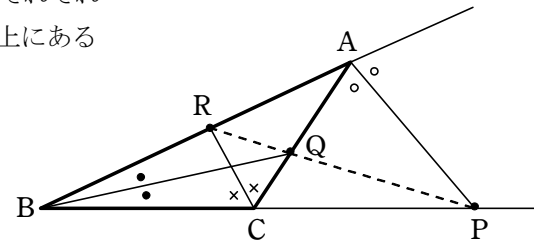
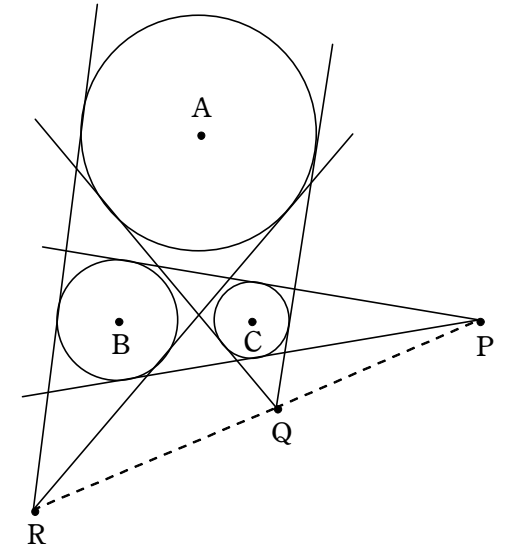


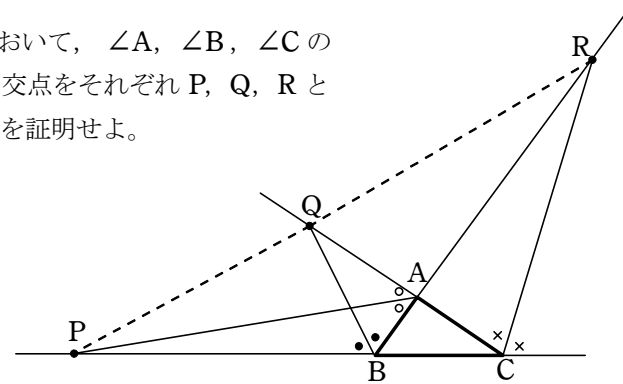
問題1 $AB \neq AC$ である $\triangle ABC$ において、 $\angle A$ の外角の二等分線と直線 BC との交点を P 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ の二等分線と対辺 CA 、 AB との交点をそれぞれ Q 、 R とする。このとき、3点 P 、 Q 、 R は一直線上にあることを証明せよ。



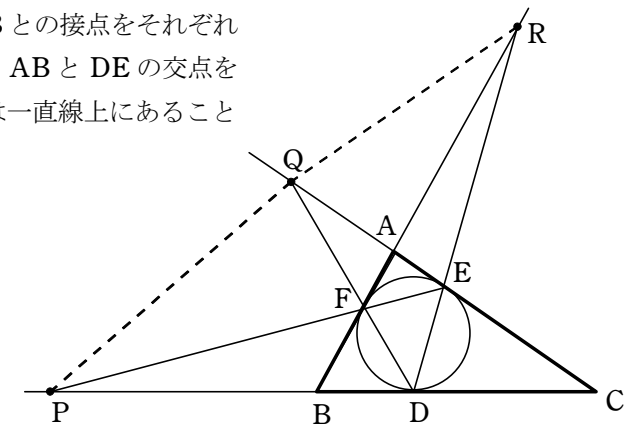
問題2 半径の互いに異なる3つの円 A 、 B 、 C がある。円 B と C 、 C と A 、 A と B の共通外接線の交点をそれぞれ P 、 Q 、 R とするとき、この3点は一直線上にあることを証明せよ。



類題 どの2辺の長さも異なる $\triangle ABC$ において、 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ の外角の二等分線と直線 BC 、 CA 、 AB との交点をそれぞれ P 、 Q 、 R とするとき、この3点は一直線上にあることを証明せよ。

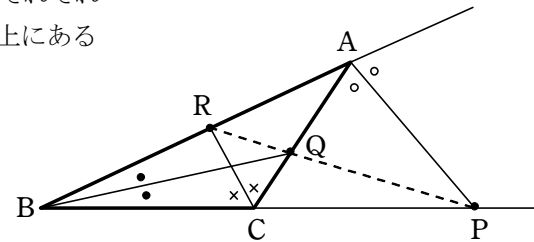


問題3 $\triangle ABC$ の内接円と辺 BC 、 CA 、 AB との接点をそれぞれ D 、 E 、 F とする。 EF と BC 、 FD と CA 、 AB と DE の交点をそれぞれ P 、 Q 、 R とするとき、この3点は一直線上にあることを証明せよ。



メネラウスの定理の逆を用いる証明問題

問題1 $AB \neq AC$ である $\triangle ABC$ において、 $\angle A$ の外角の二等分線と直線 BC との交点を P 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ の二等分線と対辺 CA 、 AB との交点をそれぞれ Q 、 R とする。このとき、3点 P 、 Q 、 R は一直線上にあることを証明せよ。



証明 $BC=a$ 、 $CA=b$ 、 $AB=c$ とおく。

AP は $\angle A$ の外角の二等分線であるから

$$BP : PC = c : b$$

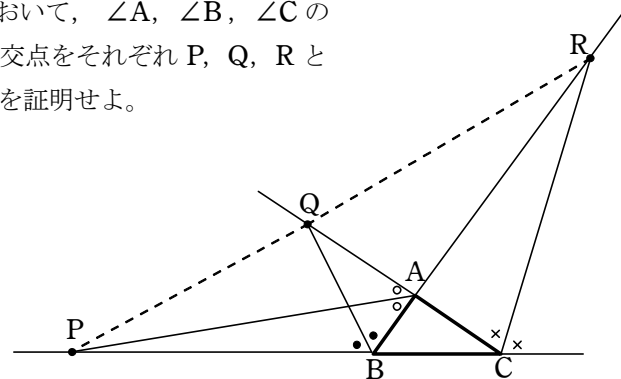
BQ 、 CR はそれぞれ $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ の二等分線であるから

$$CQ : QA = a : c, \quad AR : RB = b : a$$

$$\text{ゆえに } \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

したがって、メネラウスの定理の逆により、3点 P 、 Q 、 R は一直線上にある。 (証明終)

類題 どの2辺の長さも異なる $\triangle ABC$ において、 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ の外角の二等分線と直線 BC 、 CA 、 AB との交点をそれぞれ P 、 Q 、 R とするとき、この3点は一直線上にあることを証明せよ。



証明 $BC=a$ 、 $CA=b$ 、 $AB=c$ とおくと

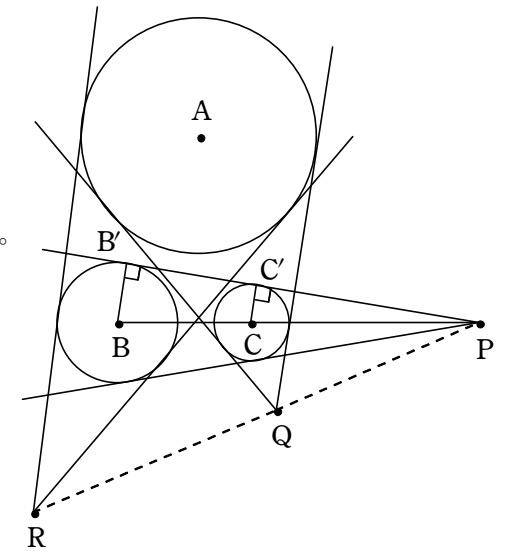
AP 、 BQ 、 CR はそれぞれ $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ の外角の二等分線であるから

$$BP : PC = c : b, \quad CQ : QA = a : c, \quad AR : RB = b : a$$

$$\text{ゆえに } \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

メネラウスの定理の逆により、3点 P 、 Q 、 R は一直線上にある。 (証明終)

問題2 半径の互いに異なる3つの円 A 、 B 、 C がある。円 B と C 、 C と A 、 A と B の共通外接線の交点をそれぞれ P 、 Q 、 R とするとき、この3点は一直線上にあることを証明せよ。



証明 P 、 Q 、 R はそれぞれ直線 BC 、 CA 、 AB 上にある。

円 A 、 B 、 C の半径を r_A 、 r_B 、 r_C とし、 B と C の共通外接線と円 B 、 C との接点をそれぞれ B' 、 C' とすると、 $\triangle PBB' \sim \triangle PCC'$ であるから

$$PB : PC = BB' : CC' = r_B : r_C$$

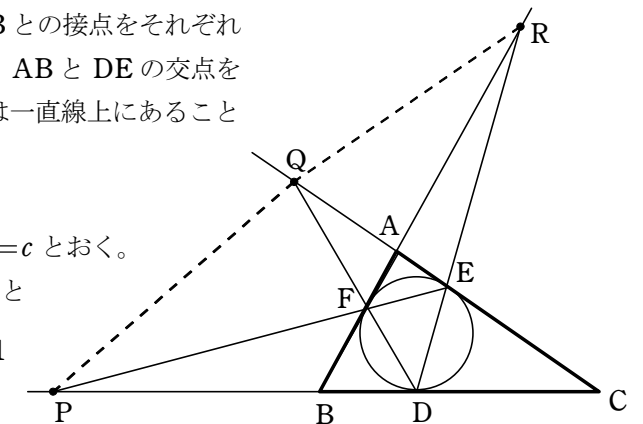
同様にして

$$QC : QA = r_C : r_A, \quad RA : RB = r_A : r_B$$

$$\text{ゆえに } \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{r_B}{r_C} \cdot \frac{r_C}{r_A} \cdot \frac{r_A}{r_B} = 1$$

したがって、メネラウスの定理の逆により、3点 P 、 Q 、 R は一直線上にある。 (証明終)

問題3 $\triangle ABC$ の内接円と辺 BC 、 CA 、 AB との接点をそれぞれ D 、 E 、 F とする。 EF と BC 、 FD と CA 、 AB と DE の交点をそれぞれ P 、 Q 、 R とするとき、この3点は一直線上にあることを証明せよ。



証明 $AE=AF=a$ 、 $BF=BD=b$ 、 $CD=CE=c$ とおく。

$\triangle ABC$ と EF にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$$

$$\text{ゆえに } \frac{BP}{PC} = \frac{b}{c}$$

$\triangle ABC$ と FD 、 $\triangle ABC$ と DE についても同様にして

$$\frac{CQ}{QA} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = 1, \quad \frac{AR}{RB} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = 1 \quad \text{より} \quad \frac{CQ}{QA} = \frac{c}{a}, \quad \frac{AR}{RB} = \frac{a}{b}$$

$$\text{ゆえに } \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$$

メネラウスの定理の逆により、3点 P 、 Q 、 R は一直線上にある。 (証明終)