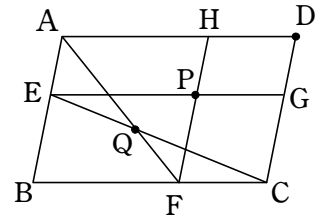
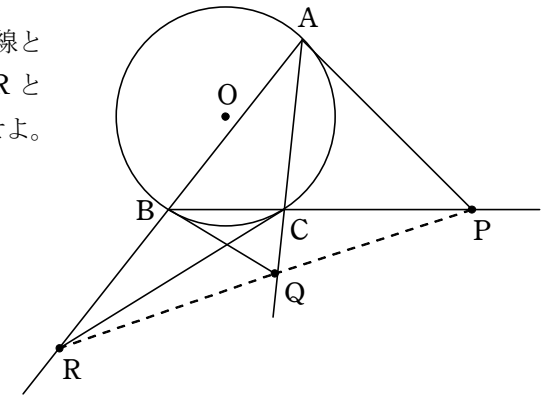


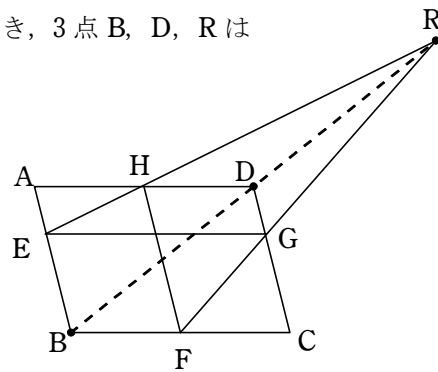
問題1 平行四辺形  $ABCD$  の辺  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  上にそれぞれ点  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  を  $EG \parallel AD$ ,  $HF \parallel AB$  となるようにとる。  
 $EG$  と  $HF$  の交点を  $P$ ,  $AF$  と  $EC$  の交点を  $Q$  とするとき、3点  $Q$ ,  $P$ ,  $D$  は一直線上にあることを証明せよ。



問題3  $\triangle ABC$  の外接円  $O$  の  $A$ ,  $B$ ,  $C$  における接線と直線  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  との交点をそれぞれ  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  とするとき、この3点は一直線上にあることを証明せよ。

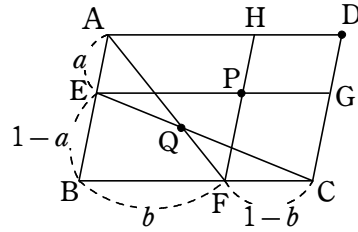


問題2 問題1において、直線  $EH$  と  $FG$  が点  $R$  で交わるとき、3点  $B$ ,  $D$ ,  $R$  は一直線上にあることを証明せよ。



メネラウスの定理の逆を用いる証明問題その2

問題1 平行四辺形 ABCD の辺 AB, BC, CD, DA 上にそれぞれ点 E, F, G, H を  $EG \parallel AD$ ,  $HF \parallel AB$  となるようにとる。EG と HF の交点を P, AF と EC の交点を Q とするとき, 3点 Q, P, D は一直線上にあることを証明せよ。



証明  $AE : EB = HP : PF = a : (1-a)$ ,  $AH : HD = BF : FC = b : (1-b)$  とおく。△ABF と直線 EC について, メネラウスの定理を用いると

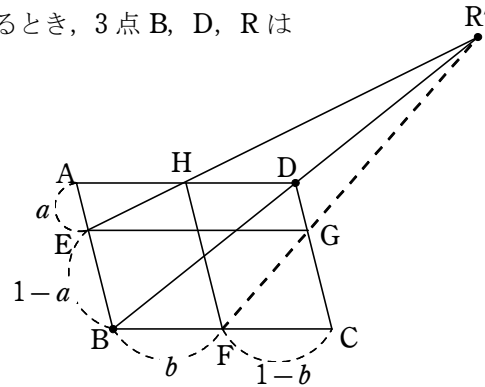
$$\frac{AQ}{QF} \cdot \frac{FC}{CB} \cdot \frac{BE}{EA} = 1 \quad \text{よって} \quad \frac{AQ}{QF} \cdot \frac{1-b}{1} \cdot \frac{1-a}{a} = 1 \quad \text{より} \quad \frac{AQ}{QF} = \frac{a}{(1-a)(1-b)}$$

△AFH において, Q, P, D はそれぞれ AF, FH, HA 上にあり

$$\frac{AQ}{QF} \cdot \frac{FP}{PH} \cdot \frac{HD}{DA} = \frac{a}{(1-a)(1-b)} \cdot \frac{1-a}{a} \cdot \frac{1-b}{1} = 1$$

したがって, メネラウスの定理の逆により, 3点 Q, P, D は一直線上にある。(証明終)

問題2 問題1において, 直線 EH と FG が点 R で交わる時, 3点 B, D, R は一直線上にあることを証明せよ。



証明  $AE : EB = DG : GC = a : (1-a)$ ,  $AH : HD = BF : FC = b : (1-b)$

とおく。EH と FG が交わるのは  $EH \not\parallel FG$  のときで  $a : (1-a) \neq b : (1-b)$  より  $a \neq b$

このとき  $EH \not\parallel BD$  となる。EH と BD の交点を R' とし, 3点 F, G, R' が一直線上にあることを示す。

△ABD と直線 EH について, メネラウスの定理を用いると

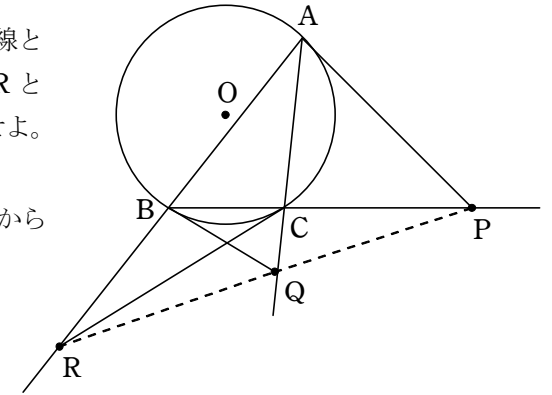
$$\frac{BR'}{R'D} \cdot \frac{DH}{HA} \cdot \frac{AE}{EB} = 1 \quad \text{よって} \quad \frac{BR'}{R'D} \cdot \frac{1-b}{b} \cdot \frac{a}{1-a} = 1 \quad \text{より} \quad \frac{BR'}{R'D} = \frac{b(1-a)}{a(1-b)}$$

△BCD において, F, G, R' はそれぞれ BC, CD, DB 上にあり

$$\frac{BR'}{R'D} \cdot \frac{DG}{GC} \cdot \frac{CF}{FB} = \frac{b(1-a)}{a(1-b)} \cdot \frac{a}{1-a} \cdot \frac{1-b}{b} = 1$$

メネラウスの定理の逆により, 3点 F, G, R' は一直線上にあるから, R' は EH と FG の交点となり R に一致する。すなわち, 3点 B, D, R は一直線上にある。(証明終)

問題3 △ABC の外接円 O の A, B, C における接線と直線 BC, CA, AB との交点をそれぞれ P, Q, R とするとき, この3点は一直線上にあることを証明せよ。



証明  $\angle PBA = \angle PAC$  より  $\triangle PBA \cong \triangle PAC$  であるから

$$\frac{AB}{CA} = \frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PA} \quad \text{より}$$

$$\frac{PB}{PC} = \frac{PA}{PC} \cdot \frac{PB}{PA} = \left(\frac{AB}{CA}\right)^2$$

同様に  $\triangle QBC \cong \triangle QAB$ ,  $\triangle RCB \cong \triangle RAC$  であるから

$$\frac{BC}{AB} = \frac{QB}{QA} = \frac{QC}{QB}, \quad \frac{CA}{BC} = \frac{RC}{RB} = \frac{RA}{RC} \quad \text{より}$$

$$\frac{QC}{QA} = \frac{QB}{QA} \cdot \frac{QC}{QB} = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2, \quad \frac{RA}{RB} = \frac{RC}{RB} \cdot \frac{RA}{RC} = \left(\frac{CA}{BC}\right)^2$$

$$\text{ゆえに} \quad \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \left(\frac{AB}{CA}\right)^2 \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 \left(\frac{CA}{BC}\right)^2 = 1$$

したがって, 3点 P, Q, R は一直線上にある (証明終)

参考 この問題は, 円に内接する六角形についてのパスカルの定理において, 隣り合う3組の2点が一致した場合になっている。