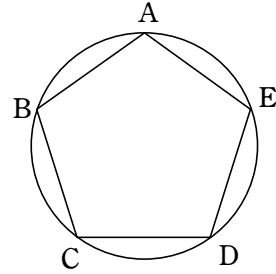


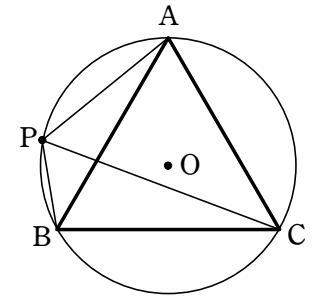
トレミーの定理を利用する問題

問題1 辺の長さが1の正五角形の対角線の長さを求めよ。



問題4 半径が1の円Oに正三角形ABCが内接している。  
周上の任意の点をPとすると、次の式を証明せよ。

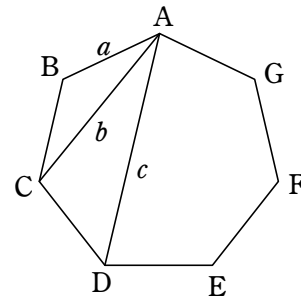
$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 6$$



問題2 正七角形 ABCDEFG の辺と対角線の長さを図のように

$$AB = a, AC = b, AD = c$$

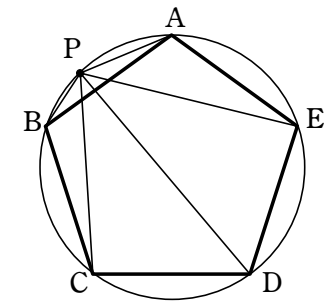
とおくとき、 $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$  となることを証明せよ。



問題5 正五角形 ABCDE の外接円の弧 AB 上に点 P があるとき

$$PA + PB + PD = PC + PE$$

となることを証明せよ。

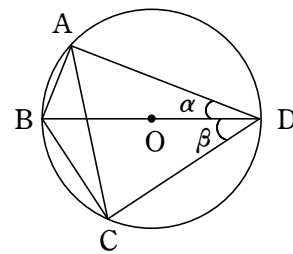


問題3 線分 BD を直径とする円 O に四角形 ABCD が内接している。

$$\angle ADB = \alpha, \quad \angle CDB = \beta$$

とすると、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$



トレミーの定理を利用する問題

問題1 辺の長さが1の正五角形の対角線の長さを求めよ。

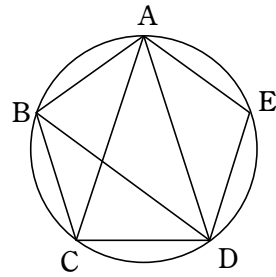
解 正五角形をABCDEとし、その外接円を考え、四角形ABCDについてトレミーの定理を用いると

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

DA=AC=BD=xとおくと

$$1+x=x^2 \text{ より } x^2-x-1=0$$

$$x>0 \text{ であるから } x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



問題2 正七角形ABCDEFGの辺と対角線の長さを図のように

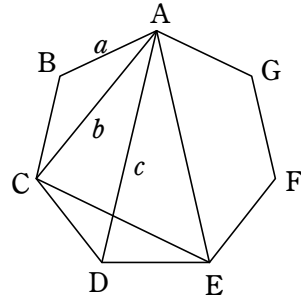
$$AB=a, AC=b, AD=c$$

とおくとき、 $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$  となることを証明せよ。

解 正七角形は円に内接するから、四角形ACDEについてトレミーの定理  $AC \cdot DE + CD \cdot EA = AD \cdot CE$  を用いて

$$b \cdot a + a \cdot c = c \cdot b$$

両辺をabcで割ると  $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$



問題3 線分BDを直径とする円Oに四角形ABCDが内接している。

$$\angle ADB=\alpha, \angle CDB=\beta$$

とするとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

解  $BD=2R$  とおくと、 $\angle DAB=\angle DCB=90^\circ$  であるから

$$AB=2R\sin\alpha, BC=2R\sin\beta, CD=2R\cos\beta, DA=2R\cos\alpha$$

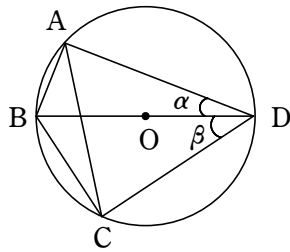
また、 $\triangle ACD$  における正弦定理により

$$AC=2R\sin(\alpha+\beta)$$

$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$  を用いて

$$(2R\sin\alpha)(2R\cos\beta) + (2R\sin\beta)(2R\cos\alpha) = 2R\sin(\alpha+\beta) \cdot 2R$$

$$\text{すなわち } \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$



問題4 半径が1の円Oに正三角形ABCが内接している。

周上の任意の点をPとするとき、次の式を証明せよ。

$$PA^2+PB^2+PC^2=6$$

解 Pは弧AB上にあるとして考える。直径をADとすると

$$AD=2, BD=CD=1, AB=BC=CA=\sqrt{3}$$

$PA=a, PB=b, PC=c, PD=d$  とおく。四角形APBC, APBDについて、トレミーの定理を用いると

$$\sqrt{3}a+\sqrt{3}b=\sqrt{3}c \text{ より } a+b=c \dots ①$$

$$\text{および } a+2b=\sqrt{3}d \dots ②$$

$\triangle APD$  は  $\angle APD=90^\circ$  だから  $a^2+d^2=4 \dots ③$

②, ③ から  $d$  を消去すると

$$a^2+\left(\frac{a+2b}{\sqrt{3}}\right)^2=4 \text{ より } 2a^2+2ab+2b^2=6 \dots ④$$

①より  $a^2+2ab+b^2=c^2$  となり、これと④から  $ab$  を消去すると

$$2a^2+(c^2-a^2-b^2)+2b^2=6 \text{ ゆえに } a^2+b^2+c^2=6$$

参考 一般に、半径1の円に内接する正n角形  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  と周上の点Pについては

$$PA_1^2+PA_2^2+PA_3^2+\dots+PA_n^2=2n$$

問題5 正五角形ABCDEの外接円の弧AB上に点Pがあるとき

$$PA+PB+PD=PC+PE$$

となることを証明せよ。

解 正五角形の辺と対角線の長さを1とxとして考えても一般性を失わない。四角形PDEA, PBCD, PCDEについてトレミーの定理を用いると

$$PA+PD=xPE \dots ① \quad PB+PD=xPC \dots ②$$

$$PC+PE=xPD \dots ③$$

①+② および ③ から

$$PA+PB+2PD=x(PC+PE) \dots ④ \quad PD=\frac{1}{x}(PC+PE) \dots ⑤$$

四角形ABCDについて  $1+x=x^2$  であるから  $x-\frac{1}{x}=1$

$$\text{④-⑤より } PA+PB+PD=\left(x-\frac{1}{x}\right)(PC+PE)=PC+PE$$

