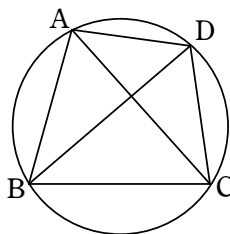


トレミーの定理 (プトレマイオスの定理)

四角形 ABCD が円に内接するならば  
 $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$   
 が成り立つ。



証明1 (相似を用いる)

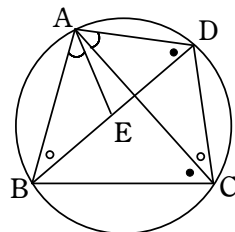
対角線 BD 上に点 E を  $\angle BAE = \angle CAD$  となるようにとると  
 2組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle ABE \sim \triangle ACD \quad \text{から} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}$$

$$\text{同様に} \quad \triangle AED \sim \triangle ABC \quad \text{から} \quad \frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AC}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad AC \cdot BD &= AC \cdot (BE + ED) = AC \cdot \left( \frac{AB}{AC} \cdot CD + \frac{AD}{AC} \cdot BC \right) \\ &= AB \cdot CD + BC \cdot DA \end{aligned}$$

(証明終)



証明2 (余弦定理を用いる)

$AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ ,  $DA = d$  とおく。

$\triangle ABC$  と  $\triangle ADC$  に余弦定理を用いると

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle ABC$$

$$AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \angle ADC = c^2 + d^2 + 2cd \cos \angle ABC$$

この2つの式から  $\cos \angle ABC$  を消去すると

$$(ab + cd)AC^2 = ab(c^2 + d^2) + cd(a^2 + b^2)$$

$$\text{右辺} = ac \cdot bc + bd \cdot ad + ac \cdot ad + bd \cdot bc = (ac + bd)(bc + ad)$$

$$\text{よって} \quad (ab + cd)AC^2 = (ac + bd)(bc + ad) \quad \dots\dots \text{①}$$

$\triangle BCD$  と  $\triangle BAD$  に余弦定理を用い、同様にして

$$(bc + ad)BD^2 = bc(a^2 + d^2) + ad(b^2 + c^2)$$

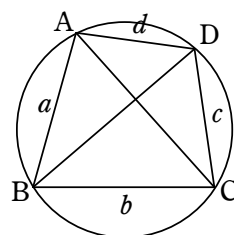
$$= (ac + bd)(ab + cd) \quad \dots\dots \text{②}$$

①, ② を辺々かけ合せると

$$(ab + cd)(bc + ad)AC^2 \cdot BD^2 = (ac + bd)^2 (ab + cd)(bc + ad)$$

$$AC^2 \cdot BD^2 = (ac + bd)^2$$

したがって  $AC \cdot BD = ac + bd$  すなわち  $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$  (証明終)



証明3 (正弦定理を用いる)

外接円の半径を  $R$ , 弧  $AB$ , 弧  $BC$ , 弧  $CD$ , 弧  $DA$  の  
 円周角をそれぞれ  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  とすると  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$   
 正弦定理を用いると

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = 2R \sin \alpha \cdot 2R \sin \gamma + 2R \sin \beta \cdot 2R \sin \delta$$

$$AC \cdot BD = 2R \sin(\alpha + \beta) \cdot 2R \sin(\beta + \gamma)$$

であるから

$$\sin \alpha \sin \gamma + \sin \beta \sin \delta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta + \gamma) \quad \dots\dots ③$$

を示せばよい。ここで,  $\alpha + \beta = A$ ,  $\beta + \gamma = B$  とおくと

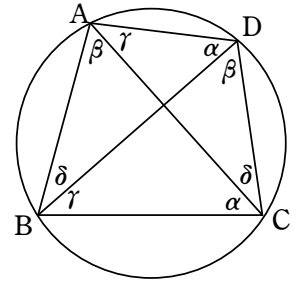
$$\alpha = A - \beta, \quad \gamma = B - \beta, \quad \sin \delta = \sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin(A + B - \beta)$$

三角関数の積  $\rightarrow$  和・差の公式  $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$  を用いると

$$\sin \alpha \sin \gamma + \sin \beta \sin \delta = \sin(A - \beta) \sin(B - \beta) + \sin \beta \sin(A + B - \beta)$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B - 2\beta)] + \frac{1}{2}[\cos(A + B - 2\beta) - \cos(A + B)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)] = \sin A \sin B = \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta + \gamma) \quad (\text{証明終})$$



証明4 (座標と三角関数を用いる)

四角形  $ABCD$  の外接円の半径を 1 としても一般性は  
 失われない。外接円の中心を  $O$ ,  $OD$  にそって  $x$  軸を  
 とる。  $OD$  から  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  までの回転の角をそれ  
 ぞれ  $2\alpha$ ,  $2\beta$ ,  $2\gamma$  とし,  $0 < 2\gamma < 2\beta < 2\alpha < 2\pi$  とする。

$0 < 2\alpha - 2\beta \leq \pi$  のとき  $\angle AOB = 2\alpha - 2\beta$  であるから

$$AB = 2 \sin \frac{1}{2} \angle AOB = 2 \sin(\alpha - \beta) \quad \dots\dots ④$$

$\pi < 2\alpha - 2\beta < 2\pi$  のとき  $\angle AOB = 2\pi - (2\alpha - 2\beta)$  であるから

$$AB = 2 \sin \frac{1}{2} \angle AOB = 2 \sin\{\pi - (\alpha - \beta)\} = 2 \sin(\alpha - \beta)$$

となり, この場合も ④ を用いてよい。

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = 2 \sin(\alpha - \beta) \cdot 2 \sin \gamma + 2 \sin(\beta - \gamma) \cdot 2 \sin \alpha$$

$$AC \cdot BD = 2 \sin(\alpha - \gamma) \cdot 2 \sin \beta$$

であるから

$$\sin(\alpha - \beta) \sin \gamma + \sin(\beta - \gamma) \sin \alpha = \sin(\alpha - \gamma) \sin \beta \quad \dots\dots ⑤$$

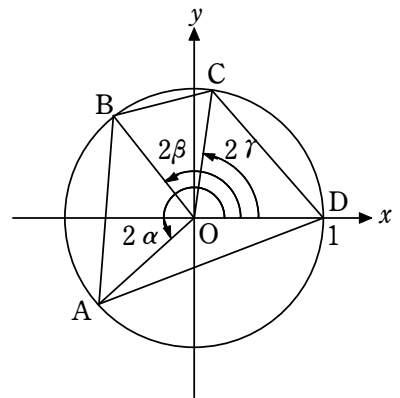
を示せばよい。⑤の左辺から

$$\sin(\alpha - \beta) \sin \gamma + \sin(\beta - \gamma) \sin \alpha$$

$$= (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \sin \gamma + (\sin \beta \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma) \sin \alpha$$

$$= (-\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma) \sin \beta = \sin(\alpha - \gamma) \sin \beta$$

(証明終)



証明5 (複素数を用いる)

四角形 ABCD の対角線 AC, BD の交点を O とし,  
O および頂点を表す複素数を O(0), A( $\alpha$ ), B( $\beta$ ), C( $\gamma$ ),  
D( $\delta$ ) とする。  $\angle ABC + \angle ADC = \pi$  であるから

$$\arg \frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta} + \arg \frac{\gamma - \delta}{\alpha - \delta} = \pi$$

$$\text{よって } \arg \frac{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)}{(\gamma - \beta)(\alpha - \delta)} = \pi$$

$(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) = z$ ,  $(\gamma - \beta)(\alpha - \delta) = w$  とおくと

$$\begin{aligned} z - w &= (\alpha\gamma - \alpha\delta - \beta\gamma + \beta\delta) - (\alpha\gamma - \gamma\delta - \alpha\beta + \beta\delta) \\ &= \alpha\beta - \alpha\delta - \beta\gamma + \gamma\delta = (\alpha - \gamma)(\beta - \delta) \end{aligned}$$

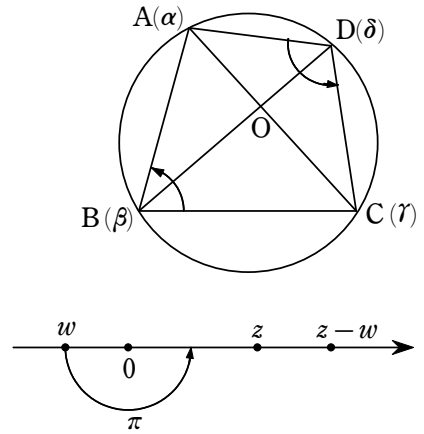
であり,  $z$ ,  $w$ ,  $z - w$  の位置は右ようになるから

$$|z| + |w| = |z - w| \quad \text{から} \quad |(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)| + |(\gamma - \beta)(\alpha - \delta)| = |(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)|$$

$$|\alpha - \beta| |\gamma - \delta| + |\gamma - \beta| |\alpha - \delta| = |\alpha - \gamma| |\beta - \delta|$$

すなわち  $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$

(証明終)



証明6 (シムソンの定理を用いる)

頂点 D から直線 BC, CA, AB に垂線をひき, 交点を  
それぞれ L, M, N とすると, シムソンの定理により 3 点  
L, M, N は同一直線上にある。

四角形 ABCD の外接円の半径を  $R$  とすると

$$2R = \frac{BC}{\sin \angle CAB} = \frac{CA}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{\sin \angle BCA}$$

四角形 AMDN について,  $\angle AMD = \angle AND = 90^\circ$  であるから 4 点 A, M, D, N は AD を直径とする円の周上にある。よって

$$MN = AD \sin \angle MDN = AD \sin \angle CAB = AD \cdot \frac{BC}{2R}$$

四角形 CDML, BLDN についても同様にすると

$$LM = CD \sin \angle LCM = CD \cdot \frac{AB}{2R}, \quad LN = BD \sin \angle LBN = BD \cdot \frac{CA}{2R}$$

したがって

$$LM + MN = LN \quad \text{すなわち} \quad AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

(証明終)

