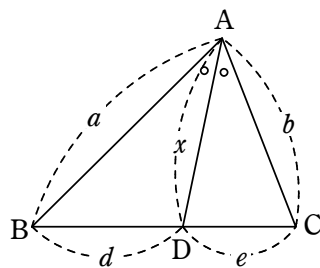


角の二等分線の長さ

右図の $\triangle ABC$ において、 $\angle A$ の二等分線を AD とするとき

$$x^2 = ab - de$$



図形的証明

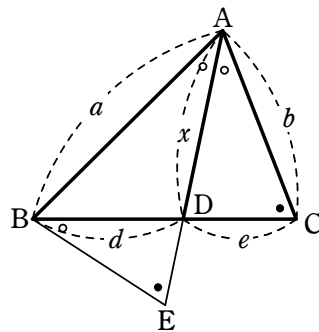
AD の延長上に点 E を $\angle DBE = \angle DAC$ となるようにとると、
 $\triangle DBE \sim \triangle DAC$ であるから

$$DE : e = d : x \quad \text{より} \quad DE = \frac{de}{x} \quad \text{ゆえに} \quad AE = x + \frac{de}{x}$$

また、 $\triangle ABE \sim \triangle ADC$ であるから

$$a : x = \left(x + \frac{de}{x}\right) : b$$

したがって $x\left(x + \frac{de}{x}\right) = ab$ より $x^2 = ab - de$ (証明終)



余弦定理を用いた証明

$$\cos \angle ADB = \frac{x^2 + d^2 - a^2}{2dx}$$

$$\cos \angle ADC = -\cos \angle ADB = \frac{x^2 + e^2 - b^2}{2ex}$$

$$\text{これらから} \quad \frac{x^2 + d^2 - a^2}{2dx} + \frac{x^2 + e^2 - b^2}{2ex} = 0$$

$$e(x^2 + d^2 - a^2) + d(x^2 + e^2 - b^2) = 0$$

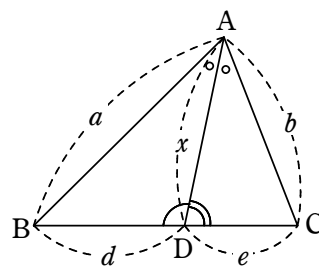
$$(d+e)x^2 + d^2e + de^2 - a^2e - b^2d = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad x^2 = \frac{a^2e + b^2d}{d+e} - de$$

ここで $d : e = a : b$ であるから、 $d = ka$ 、 $e = kb$ (k は 0 でない実数) とおくと

$$\frac{a^2e + b^2d}{d+e} = \frac{ka^2b + kab^2}{ka + kb} = \frac{kab(a+b)}{k(a+b)} = ab$$

したがって $x^2 = ab - de$ (証明終)

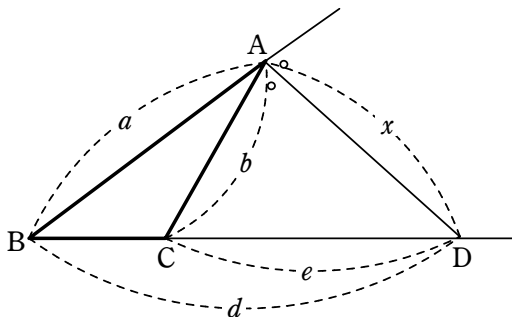


練習

右図の $\triangle ABC$ について、頂点 A における
 外角の二等分線を AD とするとき

$$x^2 = de - ab$$

であることを証明せよ。



証明

AD の A をこえた延長上に点 E を $\angle AEC = \angle ABC$ となるようにとると、 $\triangle AEC \sim \triangle ABD$ であるから

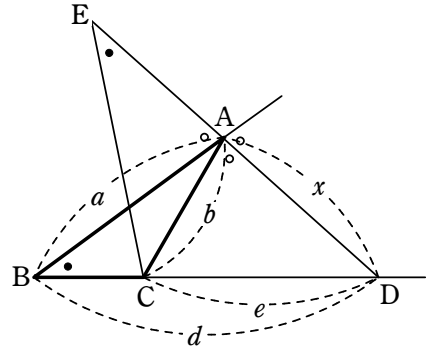
$$AE : a = b : x \quad \text{より} \quad AE = \frac{ab}{x}$$

$$\text{ゆえに} \quad DE = x + \frac{ab}{x}$$

また、 $\triangle DEC \sim \triangle DBA$ であるから

$$\left(x + \frac{ab}{x}\right) : d = e : x$$

したがって $x \left(x + \frac{ab}{x}\right) = de$ より $x^2 = de - ab$ (証明終)



別証明

$$\cos \angle B = \frac{a^2 + (d-e)^2 - b^2}{2a(d-e)}$$

$$x^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \angle B = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \frac{a^2 + (d-e)^2 - b^2}{2a(d-e)}$$

$$= \frac{(a^2 + d^2)(d-e) + \{a^2 + (d-e)^2 - b^2\}d}{d-e}$$

$$= de - \frac{a^2e - b^2d}{d-e}$$

ここで $d : e = a : b$ であるから、 $d = ka$, $e = kb$ (k は 0 でない実数) とおくと

$$\frac{a^2e - b^2d}{d-e} = \frac{ka^2b - kab^2}{ka - kb} = ab$$

したがって $x^2 = de - ab$ (証明終)