

交点の位置ベクトル

問題 三角形 OAB において、 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。次のように点 P を定めるとき、 \overrightarrow{OP} を \vec{a} 、 \vec{b} を用いて表せ。

(1) 辺 OA を $3:1$ に内分する点を C 、辺 OB を $2:1$ に内分する点を D 、線分 AD と BC の交点を P とする。

(2) 辺 AB を $3:1$ に内分する点を C 、辺 OB を $2:1$ に内分する点を D 、線分 AD と OC の交点を P とする。

(3) 辺 OA を $3:1$ に内分する点を C 、辺 OB を $2:1$ に内分する点を D 、線分 CD を $3:2$ に内分する点を E 、直線 OE と辺 AB の交点を P とする。

(4) 辺 OA を $3:1$ に内分する点を C 、辺 OB を $3:1$ に外分する点を D 、線分 CD と辺 AB の交点を P とする。

(5) 辺 OA の中点を C 、辺 AB を $4:1$ に外分する点を D 、線分 CD と辺 OB の交点を P とする。

(6) 辺 OA を $3:1$ に内分する点を C 、三角形 OAB の重心を G 、直線 CG と辺 OB の交点を P とする。

交点の位置ベクトル

問題 三角形 OAB において、 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。次のように点 P を定めるとき、 \overrightarrow{OP} を \vec{a} 、 \vec{b} を用いて表せ。

- (1) 辺 OA を $3:1$ に内分する点を C 、辺 OB を $2:1$ に内分する点を D 、線分 AD と BC の交点を P とする。

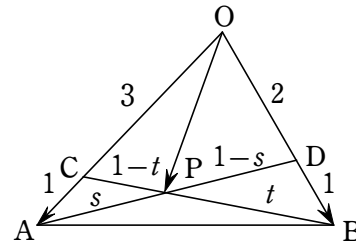
解 $AP:PD=s:(1-s)$ 、 $BP:PC=t:(1-t)$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}=(1-s)\vec{a}+\frac{2}{3}s\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OC}+(1-t)\overrightarrow{OB}=\frac{3}{4}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$$

係数を比較して $1-s=\frac{3}{4}t$ 、 $\frac{2}{3}s=1-t$ 連立して解いて

$$s=\frac{1}{2}, t=\frac{2}{3} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$



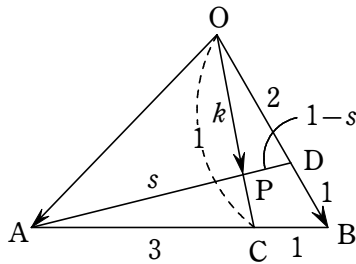
- (2) 辺 AB を $3:1$ に内分する点を C 、辺 OB を $2:1$ に内分する点を D 、線分 AD と OC の交点を P とする。

解 $AP:PD=s:(1-s)$ 、 $OP:OC=k:1$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}=(1-s)\vec{a}+\frac{2}{3}s\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OC}=k\cdot\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{3+1}=\frac{1}{4}k\vec{a}+\frac{3}{4}k\vec{b}$$

$$1-s=\frac{1}{4}k, \frac{2}{3}s=\frac{3}{4}k \quad \text{より} \quad s=\frac{9}{11}, k=\frac{8}{11}, \overrightarrow{OP}=\frac{2}{11}\vec{a}+\frac{6}{11}\vec{b}$$



- (3) 辺 OA を $3:1$ に内分する点を C 、辺 OB を $2:1$ に内分する点を D 、線分 CD を $3:2$ に内分する点を E 、直線 OE と辺 AB の交点を P とする。

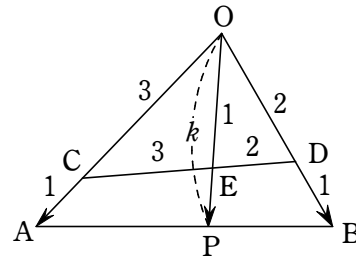
$$\text{解} \quad \overrightarrow{OE}=\frac{2\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OD}}{3+2}=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}\vec{b}=\frac{3}{10}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$$

P は OE 上にあるから

$$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OE}=\frac{3}{10}k\vec{a}+\frac{2}{5}k\vec{b}$$

P は AB 上にあるから

$$\frac{3}{10}k+\frac{2}{5}k=1 \quad \text{より} \quad k=\frac{10}{7} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{OP}=\frac{3}{7}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}$$



- (4) 辺 OA を $3:1$ に内分する点を C 、辺 OB を $3:1$ に外分する点を D 、線分 CD と辺 AB の交点を P とする。

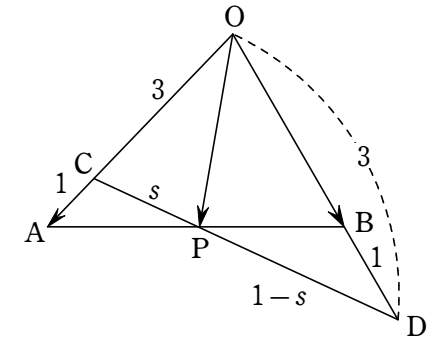
解 $CP:PD=s:(1-s)$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OC}+s\overrightarrow{OD}=\frac{3}{4}(1-s)\vec{a}+\frac{3}{2}s\vec{b}$$

P は AB 上にあるから

$$\frac{3}{4}(1-s)+\frac{3}{2}s=1 \quad \text{より} \quad s=\frac{1}{3}$$

$$\text{ゆえに} \quad \overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$



- (5) 辺 OA の中点を C 、辺 AB を $4:1$ に外分する点を D 、線分 CD と辺 OB の交点を P とする。

$$\text{解} \quad \overrightarrow{OD}=\frac{-\vec{a}+4\vec{b}}{4-1}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$$

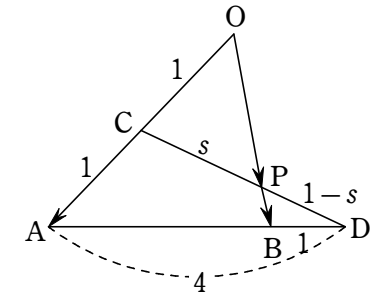
$CP:PD=s:(1-s)$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OC}+s\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(1-s)\vec{a}+s\left(-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{6}s\right)\vec{a}+\frac{4}{3}s\vec{b}$$

P は OB 上にあるから $\frac{1}{2}-\frac{5}{6}s=0$ より $s=\frac{3}{5}$

$$\text{ゆえに} \quad \overrightarrow{OP}=\frac{4}{5}\vec{b}$$



- (6) 辺 OA を $3:1$ に内分する点を C 、三角形 OAB の重心を G 、直線 CG と辺 OB の交点を P とする。

解 $CP:PG=(1+s):s$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=-s\overrightarrow{OC}+(1+s)\overrightarrow{OG}=-\frac{3}{4}s\vec{a}+(1+s)\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{12}s\right)\vec{a}+\frac{1}{3}(1+s)\vec{b}$$

P は OB 上にあるから $\frac{1}{3}-\frac{5}{12}s=0$ より $s=\frac{4}{5}$

$$\text{ゆえに} \quad \overrightarrow{OP}=\frac{3}{5}\vec{b}$$

