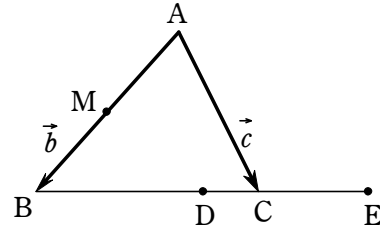


ベクトルの演算その2

問題1  $\triangle ABC$ において、辺  $AB$  の中点を  $M$ 、辺  $BC$  を  $3:1$  に内分および外分する点をそれぞれ  $D$ 、 $E$  とする。

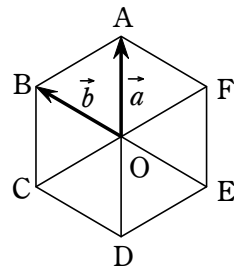
$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$  として、次のベクトルを  $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  で表せ。

- (1)  $\overrightarrow{BM}$  (2)  $\overrightarrow{BD}$  (3)  $\overrightarrow{AE}$  (4)  $\overrightarrow{DM}$



問題2 正六角形  $ABCDEF$  において、中心を  $O$ 、 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$  とする。次のベクトルを  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  を用いて表せ。

- (1)  $\overrightarrow{OC}$  (2)  $\overrightarrow{EA}$  (3)  $\overrightarrow{CE}$  (4)  $\overrightarrow{DF}$

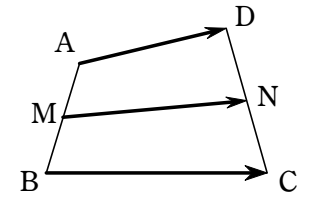


問題3  $\square ABCD$  において、対角線の交点を  $O$  とする。次のベクトルを1つのベクトルで表せ。

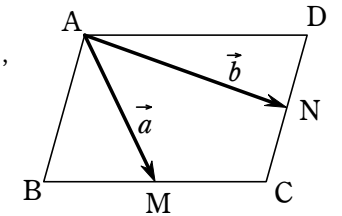
- (1)  $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$  (2)  $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}$  (3)  $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DC}$  (4)  $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})$

問題4 四角形  $ABCD$  の辺  $AB$ 、 $CD$  の中点をそれぞれ  $M$ 、 $N$  とする。このとき次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$$

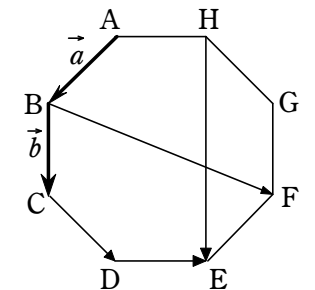


問題5 平行四辺形  $ABCD$  の辺  $BC$ 、 $CD$  の中点をそれぞれ  $M$ 、 $N$  とし、 $\overrightarrow{AM}=\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{AN}=\vec{b}$  とする。 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AD}$  を  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  を用いて表せ。



問題6 正八角形  $ABCDEFGH$  において、 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$  とするとき、次のベクトルを  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  を用いて表せ。

- (1)  $\overrightarrow{CD}$  (2)  $\overrightarrow{DE}$  (3)  $\overrightarrow{HE}$  (4)  $\overrightarrow{BF}$

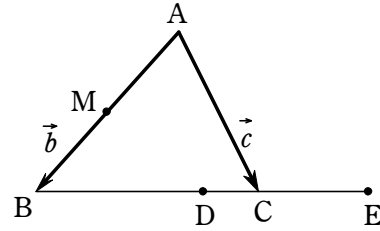


ベクトルの演算その2

問題1  $\triangle ABC$ において、辺  $AB$  の中点を  $M$ 、辺  $BC$  を  $3:1$  に内分および外分する点をそれぞれ  $D$ 、 $E$  とする。

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$  として、次のベクトルを  $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  で表せ。

- (1)  $\overrightarrow{BM}$  (2)  $\overrightarrow{BD}$  (3)  $\overrightarrow{AE}$  (4)  $\overrightarrow{DM}$



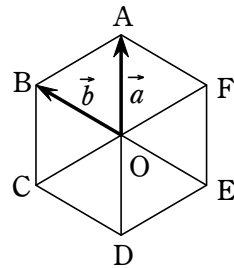
解 (1)  $\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\vec{b}$  (2)  $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{4}(\vec{c} - \vec{b})$

(3)  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{b} + \frac{3}{2}(\vec{c} - \vec{b}) = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}$

(4)  $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BM} = -\frac{3}{4}(\vec{c} - \vec{b}) - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{c}$

問題2 正六角形  $ABCDEF$  において、中心を  $O$ 、 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$  とする。次のベクトルを  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  を用いて表せ。

- (1)  $\overrightarrow{OC}$  (2)  $\overrightarrow{EA}$  (3)  $\overrightarrow{CE}$  (4)  $\overrightarrow{DF}$



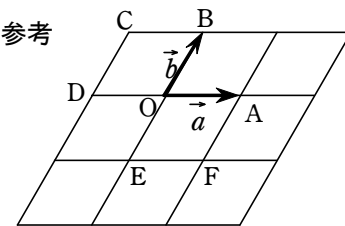
解  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OE} = \vec{a} - (-\vec{b}) = \vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC} = (-\vec{b}) - (-\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} - 2\vec{b}$

$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = -(-\vec{a} + \vec{b}) - (-\vec{a}) = 2\vec{a} - \vec{b}$

参考



問題3  $\square ABCD$  において、対角線の交点を  $O$  とする。次のベクトルを1つのベクトルで表せ。

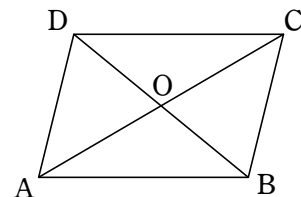
- (1)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$  (2)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}$  (3)  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC}$  (4)  $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD})$

解 (1)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$

(2)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$

(3)  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} (= \overrightarrow{AD})$

(4)  $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DC}$



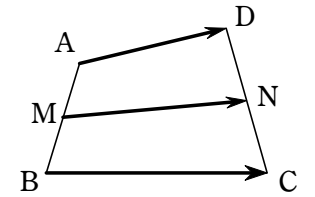
問題4 四角形  $ABCD$  の辺  $AB$ 、 $CD$  の中点をそれぞれ  $M$ 、 $N$  とする。このとき次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

解  $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ 、 $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$  とおくと  $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$ 、 $\overrightarrow{CD}=\vec{d}-\vec{c}$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\vec{b} + (\vec{c} - \vec{b}) + \frac{1}{2}(\vec{d} - \vec{c}) = \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$$

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\vec{d} + (\vec{c} - \vec{b})) = \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) \quad \text{したがって} \quad \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$



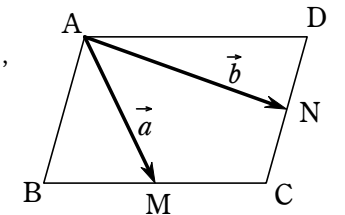
問題5 平行四辺形  $ABCD$  の辺  $BC$ 、 $CD$  の中点をそれぞれ  $M$ 、 $N$  とし、 $\overrightarrow{AM}=\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{AN}=\vec{b}$  とする。 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AD}$  を  $\vec{x}$ 、 $\vec{y}$  を用いて表せ。

解  $\overrightarrow{AB}=\vec{x}$ 、 $\overrightarrow{AD}=\vec{y}$  とおくと

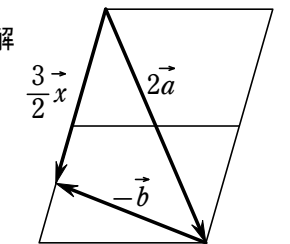
$$\vec{a} = \vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}, \quad \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{x} + \vec{y}$$

これを連立して  $\vec{x}$ 、 $\vec{y}$  について解くと

$$\overrightarrow{AB} = \vec{x} = \frac{4}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}, \quad \overrightarrow{AD} = \vec{y} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$$



別解



問題6 正八角形  $ABCDEFGH$  において、 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$  とするとき、次のベクトルを  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  を用いて表せ。

- (1)  $\overrightarrow{CD}$  (2)  $\overrightarrow{DE}$  (3)  $\overrightarrow{HE}$  (4)  $\overrightarrow{BF}$

解  $\overrightarrow{CD}=\vec{p}$ 、 $\overrightarrow{DE}=\vec{q}$  とおく。 $\vec{p}=\overrightarrow{BP}$ 、 $\vec{q}=\overrightarrow{CQ}$  となる点  $P$ 、 $Q$  をとると  $\triangle ABP$ 、 $\triangle BCQ$  は直角二等辺三角形となり

$$\overrightarrow{AP} = \sqrt{2}\vec{b}, \quad \overrightarrow{BQ} = \sqrt{2}\vec{p}$$

であるから  $\vec{a} + \vec{p} = \sqrt{2}\vec{b}$ 、 $\vec{b} + \vec{q} = \sqrt{2}\vec{p}$  したがって

(1)  $\overrightarrow{CD} = \vec{p} = -\vec{a} + \sqrt{2}\vec{b}$

(2)  $\overrightarrow{DE} = \vec{q} = -\vec{b} + \sqrt{2}\vec{p} = -\vec{b} + \sqrt{2}(-\vec{a} + \sqrt{2}\vec{b}) = -\sqrt{2}\vec{a} + \vec{b}$

(3)  $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + (-\vec{a} + \sqrt{2}\vec{b}) = (1 + \sqrt{2})\vec{b}$

(4)  $\overrightarrow{BF} = \vec{b} + \vec{p} + \vec{q} + (-\vec{a}) = \vec{b} + (-\vec{a} + \sqrt{2}\vec{b}) + (-\sqrt{2}\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a} = (-2 - \sqrt{2})\vec{a} + (2 + \sqrt{2})\vec{b} = (2 + \sqrt{2})(\vec{b} - \vec{a})$

