

数列の漸化式の解法

■ 超基本パターン1 $a_{n+1}=a_n+d$

数列 $\{a_n\}$ は、公差 d の等差数列であるから $a_n=a_1+(n-1)d$

■ 超基本パターン2 $a_{n+1}=r a_n$

数列 $\{a_n\}$ は、公比 r の等比数列であるから $a_n=a_1 r^{n-1}$

■ 基本パターン1 $a_{n+1}=a_n+f(n)$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると $b_n=a_{n+1}-a_n=f(n)$ であるから

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \quad (n \geq 2)$$

例題1 $a_1=1, a_{n+1}=a_n+2n+1$

解 $a_{k+1}-a_k=2k+1$ であるから、階差数列の公式を用いると、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} (2k+1)=1+2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n+(n-1)=n^2$$

この式は $n=1$ のときも成り立つ。

■ 基本パターン2 $a_{n+1}=p a_n+q \quad (p \neq 1, q \neq 0)$

漸化式の a_{n+1}, a_n を x で置き換えた方程式 $x=p x+q$ (特性方程式) の解を α とすると

$\alpha=p \alpha+q$ であり

$$\begin{array}{l} a_{n+1}=p a_n+q \\ -) \quad \alpha=p \alpha+q \\ \hline a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha) \end{array}$$

数列 $\{a_n-\alpha\}$ は、初項 $a_1-\alpha$ 、公比 p の等比数列であるから

$$a_n-\alpha=(a_1-\alpha)p^{n-1}$$

ゆえに $a_n=(a_1-\alpha)p^{n-1}+\alpha$ ただし $\alpha=\frac{q}{1-p}$

例題2 $a_1=6, a_{n+1}=3a_n-4$

解 与えられた漸化式を変形して

$$a_{n+1}-2=3(a_n-2) \quad \leftarrow \alpha=3\alpha-4 \text{ から } \alpha=2$$

数列 $\{a_n-2\}$ は、初項 $a_1-2=4$ 、公比 3 の等比数列であるから

$$a_n-2=4 \cdot 3^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad a_n=4 \cdot 3^{n-1}+2$$

例題3 $a_1=2, a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+3} \dots\dots \textcircled{1}$

解 $a_1 > 0$ および $\textcircled{1}$ より $a_n > 0$ である。 $\textcircled{1}$ の両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{a_n}+1$$

ここで $b_n=\frac{1}{a_n}$ とおくと、 $b_{n+1}=3b_n+1$ また $b_1=\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2}$

この漸化式を変形して

$$b_{n+1}+\frac{1}{2}=3\left(b_n+\frac{1}{2}\right) \quad \text{また} \quad b_1+\frac{1}{2}=1 \quad \leftarrow \alpha=3\alpha+1 \text{ より } \alpha=-\frac{1}{2}$$

数列 $\left\{b_n+\frac{1}{2}\right\}$ は、初項 1 、公比 3 の等比数列であるから

$$b_n+\frac{1}{2}=3^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad b_n=3^{n-1}-\frac{1}{2}=\frac{2 \cdot 3^{n-1}-1}{2}$$

したがって $a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{2}{2 \cdot 3^{n-1}-1}$

■ 基本パターン3 $a_{n+1}=f(n) a_n$

この漸化式は、基本パターン1の和を積に代えたものになっている。この式の n を $1, 2, \dots, n-1$ とおいて得られる等式を辺々掛け合わせると

$$\begin{array}{l} a_2=a_1 f(1) \\ a_3=a_2 f(2) \\ a_4=a_3 f(3) \\ \dots\dots\dots \\ \times) \quad a_n=a_{n-1} f(n-1) \\ \hline a_n=a_1 f(1) f(2) f(3) \dots f(n-1) \quad (n \geq 2) \end{array}$$

例題4 $a_1=1, a_{n+1}=\frac{n}{n+2} a_n$

解 この漸化式の n を $1, 2, 3, \dots, n-1$ とおいて得られる等式を辺々掛け合わせると

$$n \geq 2 \text{ のとき, } a_n=a_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \dots \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-1}{n+1}=\frac{2}{n(n+1)}$$

この式は、 $n=1$ のときも成り立つ。

■ 応用パターン1 $a_{n+1}=p a_n+f(n)$ ($p \neq 1$)

解法1 この漸化式の両辺を p^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{a_n}{p^n} + \frac{f(n)}{p^{n+1}}$

$$b_n = \frac{a_n}{p^n} \text{ とおくと } b_{n+1} = b_n + \frac{f(n)}{p^{n+1}} \quad \leftarrow \text{基本パターン1}$$

$$n \geq 2 \text{ のとき } b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(k)}{p^{k+1}} \quad \text{すなわち } \frac{a_n}{p^n} = \frac{a_1}{p} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(k)}{p^{k+1}}$$

解法2 与えられた $f(n)$ に対し $g(n+1)=p g(n)+f(n)$ となるような $g(n)$ を見つけると

$$a_{n+1} = p a_n + f(n)$$

$$\text{---) } g(n+1) = p g(n) + f(n)$$

$$a_{n+1} - g(n+1) = p \{a_n - g(n)\} \quad \leftarrow \text{基本パターン2}$$

数列 $\{a_n - g(n)\}$ は、初項 $a_1 - g(1)$ 、公比 p の等比数列であるから

$$a_n - g(n) = \{a_1 - g(1)\} p^{n-1} \quad \text{ゆえに } a_n = \{a_1 - g(1)\} p^{n-1} + g(n)$$

例題5 $a_1=1, a_{n+1}=3a_n+2^n$

解 この漸化式の両辺を 3^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$b_n = \frac{a_n}{3^n} \text{ とおくと } b_{n+1} = b_n + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{また } b_1 = \frac{a_1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$n \geq 2 \text{ のとき } b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{2}{3} \left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1 - \frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$a_n = 3^n b_n = 3^n - 2^n, \quad \text{この式は、} n=1 \text{ のときも成り立つ。}$$

例題6 $a_1=3, a_{n+1}=2a_n-n+3 \dots\dots ①$

$$b_n = a_n + \alpha n + \beta \dots\dots ② \text{ とおくと、} ① \text{ は } b_{n+1} = 2b_n \dots\dots ③ \text{ になるという。}$$

α, β の値を求めよ。また、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解 ②を③に代入すると

$$a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = 2(a_n + \alpha n + \beta) \quad \text{より } a_{n+1} = 2a_n + \alpha n - \alpha + \beta$$

この式と①を比較すると $\alpha = -1, -\alpha + \beta = 3$ ゆえに $\alpha = -1, \beta = 2$

$$b_n = a_n - n + 2 \quad \text{また } b_1 = a_1 - 1 + 2 = 4$$

$$③ \text{ より } b_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1} \quad \text{したがって } a_n = b_n + n - 2 = 2^{n+1} + n - 2$$

■ 応用パターン2 $a_{n+2}=p a_{n+1}+q a_n$

漸化式の a_{n+2}, a_{n+1}, a_n をそれぞれ $x^2, x, 1$ で置き換えた方程式(特性方程式)

$$x^2 = p x + q$$

の2つの解を α, β とすると、 $\alpha + \beta = p, \alpha \beta = -q$ であり、与えられた漸化式は

$$a_{n+2} = (\alpha + \beta) a_{n+1} - \alpha \beta a_n \quad \dots\dots ①$$

となる。これを変形すると

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta (a_{n+1} - \alpha a_n) \quad \dots\dots ② \quad \text{または}$$

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha (a_{n+1} - \beta a_n) \quad \dots\dots ③$$

(i) $\alpha \neq \beta$ のとき

②より、数列 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ は、初項 $a_2 - \alpha a_1$ 、公比 β の等比数列であるから

$$a_{n+1} - \alpha a_n = (a_2 - \alpha a_1) \beta^{n-1} \quad \dots\dots ②'$$

③より、数列 $\{a_{n+1} - \beta a_n\}$ は、初項 $a_2 - \beta a_1$ 、公比 α の等比数列であるから

$$a_{n+1} - \beta a_n = (a_2 - \beta a_1) \alpha^{n-1} \quad \dots\dots ③'$$

$$②' - ③' \text{ より } (\beta - \alpha) a_n = (a_2 - \alpha a_1) \beta^{n-1} - (a_2 - \beta a_1) \alpha^{n-1}$$

$$\text{ゆえに } a_n = \frac{(a_2 - \alpha a_1) \beta^{n-1} - (a_2 - \beta a_1) \alpha^{n-1}}{\beta - \alpha}$$

(ii) $\alpha = \beta$ のとき

$$②' \text{ より } a_{n+1} - \alpha a_n = (a_2 - \alpha a_1) \alpha^{n-1} \quad \leftarrow \text{応用パターン1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{a_n}{\alpha^n} = \frac{a_2 - \alpha a_1}{\alpha^2}$$

数列 $\left\{\frac{a_n}{\alpha^n}\right\}$ は、初項 $\frac{a_1}{\alpha}$ 、公差 $\frac{a_2 - \alpha a_1}{\alpha^2}$ の等差数列であるから

$$\frac{a_n}{\alpha^n} = \frac{a_1}{\alpha} + (n-1) \cdot \frac{a_2 - \alpha a_1}{\alpha^2} \quad \text{ゆえに } a_n = a_1 \alpha^{n-1} + (a_2 - \alpha a_1) \alpha^{n-2} (n-1)$$

例題7 $a_1=1, a_2=4, a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$

解 与えられた漸化式を変形すると

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 2a_n) \dots\dots ① \quad \leftarrow x^2 = 5x - 6 \text{ を解くと } x=2, 3$$

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 3a_n) \dots\dots ②$$

①より、数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は、初項 $a_2 - 2a_1 = 2$ 、公比 3 の等比数列であるから

$$a_{n+1} - 2a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \quad \dots\dots ①'$$

同様に②より $a_{n+1} - 3a_n = 1 \cdot 2^{n-1} \quad \dots\dots ②'$

$$①' - ②' \text{ より } a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1}$$

例題8 $a_1=1, a_2=4, a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$ 答 $a_n = n 2^{n-1}$