

直線と平面の垂直・三垂線の定理

定義 直線 h と平面 α について

$$h \perp \alpha \iff h \text{ と } \alpha \text{ 上のすべての直線が垂直}$$

定理 α 上の交わる 2 直線を l, m とするとき

$$h \perp l, h \perp m \implies h \perp \alpha$$

証明 h は l, m の交点 H を通るとしてよい。 H を通る α 上の任意の直線 n が、 $h \perp n$ となることを示す。

α 上で H を通らない直線 g をひき、 l, m, n との交点をそれぞれ L, M, N とする。 h 上に H に関して対称な点 P, Q をとると $LH \perp PQ, MH \perp PQ$ であるから

$$LP=LQ, MP=MQ$$

$\triangle PLM$ と $\triangle QLM$ において、 3 辺がそれぞれ等しいから

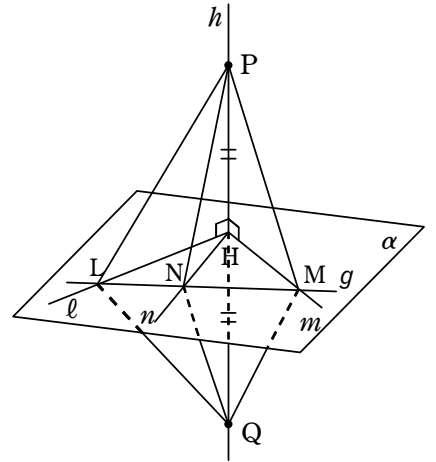
$$\triangle PLM \equiv \triangle QLM \quad \text{ゆえに} \quad \angle PLM = \angle QLM$$

$\triangle PLN$ と $\triangle QLN$ において、 2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle PLN \equiv \triangle QLN \quad \text{ゆえに} \quad NP=NQ$$

N は線分 PQ の両端から等距離にあるから $NH \perp PQ$ すなわち $h \perp n$ である。したがって $h \perp \alpha$ が成り立つ。

h または n が H を通らないとき、 H を通りそれぞれに平行な直線 h', n' を考えれば、 $h' \perp n'$ から $h \perp n$ であることがいえる。 (証明終)



三垂線の定理 右図において

- (1) $PH \perp \alpha, HA \perp l \implies PA \perp l$
- (2) $PH \perp \alpha, PA \perp l \implies HA \perp l$
- (3) $PH \perp HA, HA \perp l, PA \perp l \implies PH \perp \alpha$

証明 (1) $PH \perp \alpha$ から $PH \perp l$ (直線と面の垂直の定義から)

また、仮定から $l \perp HA$

l は平面 PHA 上の交わる 2 直線 PH, HA に垂直であるから

$$l \perp \text{平面} PHA \text{ (定理)}$$

PA は平面 PHA 上の直線だから $l \perp PA$ (定義)

- (2) $PH \perp \alpha$ から $PH \perp l$, これと仮定から

$$l \perp PH, l \perp PA \text{ であるから } l \perp \text{平面} PHA \text{ よって } l \perp HA$$

- (3) $HA \perp l, PA \perp l$ から $l \perp \text{平面} PHA$ よって $l \perp PH$

$$PH \perp l, PH \perp HA \text{ であるから } PH \perp \alpha$$

(証明終)

