

問題

Ⅲ

$t$  を実数とする。 $|\vec{OA}|=3$ ,  $|\vec{OB}|=2$ ,  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}=3$  である。 $\triangle OAB$  において、頂点  $O$  から辺  $AB$  に下ろした垂線と辺  $AB$  の交点を  $H$  とし、 $AH : HB = t : (1-t)$  とする。

(1)  $t = \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}}$  である。

(2)  $\triangle OAB$  の垂心を  $P$  とするとき、 $\vec{OP} = \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}} \vec{OA} + \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}} \vec{OB}$  である。

解説・解答

$$\cos \angle AOB = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| |\vec{OB}|} = \frac{3}{3 \cdot 2} = \frac{1}{2} \quad (\angle AOB = 60^\circ \text{ を使うと楽})$$

頂点  $A, B$  から各対辺に下した垂線の交点を  $D, C$  とすると、 $OH, AD, BC$  は点  $P$  で交わり

$$OC = OB \cos \angle AOB = 1$$

$$OD = OA \cos \angle AOB = \frac{3}{2}$$

これらから

$$OC : CA = 1 : 2$$

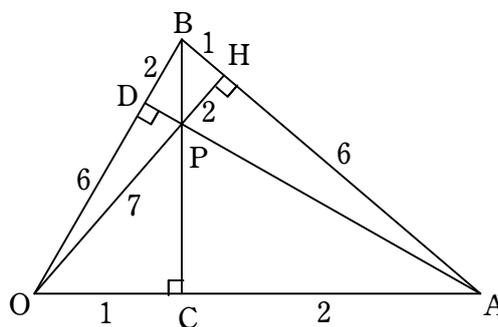
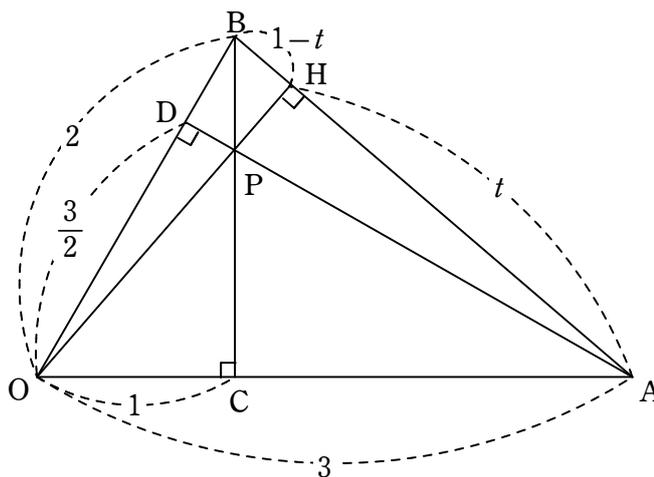
$$OD : DB = 3 : 1 = 6 : 2$$

ここで標記の定理を用いると右下図になり

$$t = \frac{AH}{AB} = \frac{1}{7}$$

$$\vec{QH} = \frac{1}{7} \vec{OA} + \frac{6}{7} \vec{OB} \quad \text{から}$$

$$\vec{OP} = \frac{7}{9} \vec{QH} = \frac{1}{9} \vec{OA} + \frac{2}{3} \vec{OB}$$



(数値は各線分にそっての比)