

シンプソンの公式と 2/3 面積公式

シンプソンの公式

シンプソンの公式は数値積分の近似公式として知られていますが、実は被積分関数 $f(x)$ が 3 次以下の整関数のときには以下の公式が厳密に成り立ちます。

— 定理 1 —

$f(x)$ が 3 次以下の整関数ならば

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = (\beta - \alpha) \cdot \frac{f(\alpha) + 4f(\mu) + f(\beta)}{6} \quad \text{ただし } \mu = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

右辺は一見複雑そうに見えますが、 $(\beta - \alpha)$ は積分区間の幅、 $\frac{f(\alpha) + 4f(\mu) + f(\beta)}{6}$ は関数値 $f(\alpha)$ 、 $f(\mu)$ 、 $f(\beta)$ の 1 : 4 : 1 の重み付き平均と見なせば覚え易いのではないのでしょうか。

証明は $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ などにおいて、左辺、右辺を別々に計算して比較すればできます。定積分の線形性から各項別に計算しても差支えありません。たとえば、

$f(x) = x^3$ のとき

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta^4 - \alpha^4}{4}$$

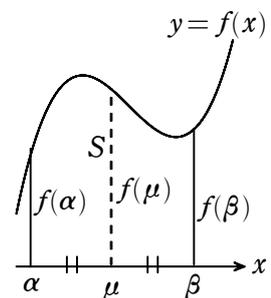
$$\begin{aligned} f(\alpha) + 4f(\mu) + f(\beta) &= \alpha^3 + 4\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^3 + \beta^3 = \alpha^3 + \frac{\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3}{2} + \beta^3 \\ &= \frac{3}{2}(\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3) \quad \text{から} \end{aligned}$$

$$(\beta - \alpha) \cdot \frac{f(\alpha) + 4f(\mu) + f(\beta)}{6} = (\beta - \alpha) \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2}(\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3) = \frac{\beta^4 - \alpha^4}{4}$$

となります。

定理 1 は、 α 、 β の大小、 $f(x)$ の正負に依らず一般的に成り立ちますが、 $\alpha \leq x \leq \beta$ の範囲で $f(x) \geq 0$ ならば、右図のような面積を求める公式になります。

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = (\beta - \alpha) \cdot \frac{f(\alpha) + 4f(\mu) + f(\beta)}{6} \\ &\quad \text{ただし } \mu = \frac{\alpha + \beta}{2} \end{aligned}$$



特に $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ のとき、次の「2/3 面積公式」が成り立ちます。

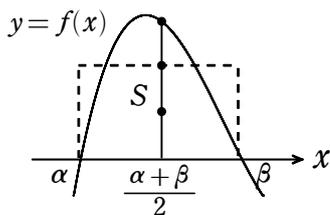
2/3 面積公式

定理 2

$f(x)$ は 3 次または 2 次関数

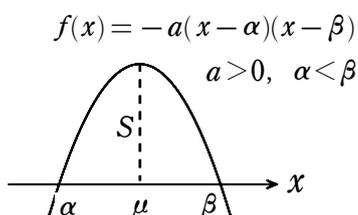
$\alpha \leq x \leq \beta$ で $f(x) \geq 0$, $f(\alpha) = f(\beta) = 0$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = (\beta - \alpha) \cdot \frac{2}{3} f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

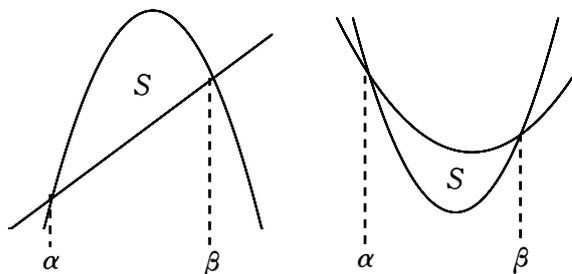


ここでは定理 2 を仮に「2/3 面積公式」と呼びますが、これを用いると 1/6 公式や 1/12 公式のような他の面積公式が容易に得られます。

■ $f(x)$ が 2 次関数 $f(x) = -a(x-\alpha)(x-\beta)$ の場合



帰着

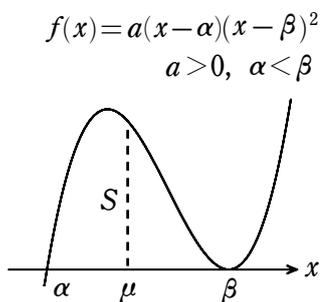


$$\mu = \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ とすると } \mu - \alpha = \frac{\beta - \alpha}{2}, \mu - \beta = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

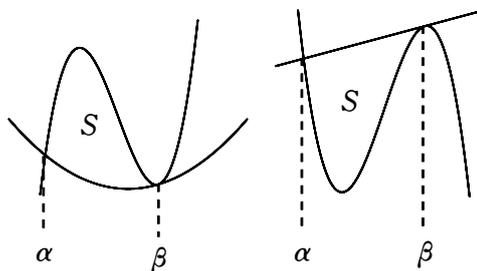
$$f(\mu) = -a(\mu - \alpha)(\mu - \beta) = \frac{a}{4}(\beta - \alpha)^2 \text{ から}$$

$$S = (\beta - \alpha) \cdot \frac{2}{3} f(\mu) = (\beta - \alpha) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{4} (\beta - \alpha)^2 = \frac{a}{6} (\beta - \alpha)^3 \quad \left(\frac{1}{6} \text{ 公式}\right)$$

■ $f(x)$ が 3 次関数 $f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)^2$, $f(x) = -a(x-\alpha)^2(x-\beta)$ の場合



帰着



$$f(\mu) = a(\mu - \alpha)(\mu - \beta)^2 = \frac{a}{8}(\beta - \alpha)^3 \text{ から}$$

$$S = (\beta - \alpha) \cdot \frac{2}{3} f(\mu) = (\beta - \alpha) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{8} (\beta - \alpha)^3 = \frac{a}{12} (\beta - \alpha)^4 \quad \left(\frac{1}{12} \text{ 公式}\right)$$

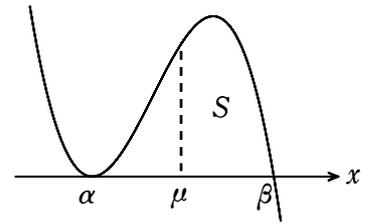
$$f(\mu) = -a(\mu - \alpha)^2(\mu - \beta) = \frac{a}{8}(\beta - \alpha)^3 \quad \text{から}$$

$$S = (\beta - \alpha) \cdot \frac{2}{3}f(\mu) = (\beta - \alpha) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{8}(\beta - \alpha)^3 = \frac{a}{12}(\beta - \alpha)^4$$

($\frac{1}{12}$ 公式)

$$f(x) = -a(x - \alpha)^2(x - \beta)$$

$a > 0, \alpha < \beta$



■ $f(x)$ が 3 次関数 $f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ の場合

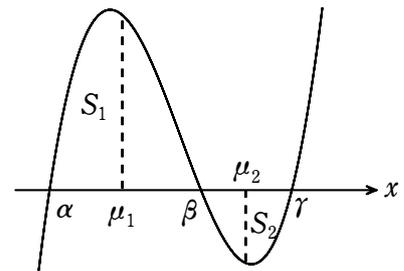
右図で $\mu_1 = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $\mu_2 = \frac{\beta + \gamma}{2}$ とすると

$$\begin{aligned} f(\mu_1) &= a(\mu_1 - \alpha)(\mu_1 - \beta)(\mu_1 - \gamma) \\ &= a \cdot \frac{\beta - \alpha}{2} \cdot \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \frac{\alpha + \beta - 2\gamma}{2} \\ &= \frac{a}{8}(\beta - \alpha)^2(2\gamma - \alpha - \beta) \end{aligned}$$

$$S_1 = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = (\beta - \alpha) \cdot \frac{2}{3}f(\mu_1) = \frac{a}{12}(\beta - \alpha)^3(2\gamma - \alpha - \beta)$$

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

$a > 0, \alpha < \beta < \gamma$



同様にして

$$\begin{aligned} -f(\mu_2) &= -a(\mu_2 - \alpha)(\mu_2 - \beta)(\mu_2 - \gamma) \\ &= -a \cdot \frac{\beta + \gamma - 2\alpha}{2} \cdot \frac{\gamma - \beta}{2} \cdot \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{a}{8}(\gamma - \beta)^2(\beta + \gamma - 2\alpha) \end{aligned}$$

$$S_2 = \int_{\beta}^{\gamma} \{-f(x)\} dx = (\gamma - \beta) \cdot \frac{2}{3}\{-f(\mu_2)\} = \frac{a}{12}(\gamma - \beta)^3(\beta + \gamma - 2\alpha)$$

■ $S_1 = S_2$ の必要十分条件

同じ図について $\mu = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ とすると

$$\begin{aligned} f(\mu) &= a(\mu - \alpha)(\mu - \beta)(\mu - \gamma) = a \cdot \frac{\gamma - \alpha}{2} \cdot \frac{\alpha + \gamma - 2\beta}{2} \cdot \frac{\alpha - \gamma}{2} \\ &= \frac{a}{8}(\gamma - \alpha)^2(2\beta - \alpha - \gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \int_{\beta}^{\gamma} \{-f(x)\} dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx \\ &= (\gamma - \alpha) \cdot \frac{2}{3}f(\mu) = \frac{a}{12}(\gamma - \alpha)^3(2\beta - \alpha - \gamma) \end{aligned}$$

したがって $S_1 = S_2 \iff 2\beta = \alpha + \gamma$