

行列の積の交換法則について

行列の積については

$$\text{結合法則: } (AB)C = A(BC) \quad \text{分配法則: } A(B+C) = AB+AC$$

は成り立つ。しかし

$$\text{交換法則: } AB=BA \text{ は一般には成り立たない}$$

このことから、たとえば

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad (A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

$$AB+BC = B(A+C)$$

なども、すべて一般には成り立たない。行列の積の計算にはつねに注意が必要である。

逆に、交換可能となるのは特別な場合であり、これに関しては次のことが成り立つ。

- ① 任意の X に対して $AX=XA \iff A=kE$
- ② $A \neq kE$ のとき, $AX=XA \iff X=pA+qE$
- ③ A, B は対角行列 $\implies AB=BA$
- ④ $AB=kE (k \neq 0) \implies AB=BA$

①の \Leftarrow , ②の \Leftarrow , ③の証明は容易である。④は逆行列の定義から証明できる。

①, ②の \Rightarrow を, 2次正方行列について証明する。

証明 ①の \Rightarrow について

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \text{ とおくと, } AX=XA \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy & bx+dy \\ az+cw & bz+dw \end{pmatrix}$$

両辺の各成分を比較し整理すると

$$bz=cy \quad \dots \text{①} \quad (a-d)y=b(x-w) \quad \dots \text{②} \quad (a-d)z=c(x-w) \quad \dots \text{③}$$

①~③が任意の x, y, z, w について成り立つためには

$$a=d, b=c=0 \text{ よって } a=d=k \text{ とおくと}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = kE \quad (k \text{ は任意})$$

(証明終)

証明 ②の \Rightarrow について

$AX=XA$ より前と同じ①~③が成り立つ。

$$bz=cy \quad \dots \text{①} \quad (a-d)y=b(x-w) \quad \dots \text{②} \quad (a-d)z=c(x-w) \quad \dots \text{③}$$

与えられた定数 a, b, c, d に対して, ①~③を満たす解 x, y, z, w を求める。

(i) $b=c=0$ のとき

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \text{ このとき } A \neq kE \text{ であるから } a \neq d$$

②, ③から $(a-d)y=0, (a-d)z=0$ よって $y=z=0$ すなわち $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$ (x, w は任意)

(3)より $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ と $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$ は交換可能である。

任意の x, w に対し $x=pa+q, w=pd+q$ となるような p, q がとれる。すなわち

$$p = \frac{x-w}{a-d}, \quad q = \frac{aw-dx}{a-d}$$

したがって $X = \begin{pmatrix} pa+q & 0 \\ 0 & pd+q \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = pA + qE$ と表せる。

(ii) $b \neq 0$ のとき

$y=pb$ (p は任意) とおくと, ①より $bz=pbz$ よって $z=pc$

すると②から $(a-d)pb=b(x-w)$ よって $x-w=pa-pd$

これを満たす解は $x=pa+q, w=pd+q$ (q は任意), これらは③も満たす。

したがって $X = \begin{pmatrix} pa+q & pb \\ pc & pd+q \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = pA + qE$ と表せる。

(iii) $c \neq 0$ のとき

$z=pc$ とおくと, 以下は(ii)と同様になる。

(証明終)