

## 逆行列

### ■ 定義について

$AB=BA=E$  を満たす  $B$  を  $A$  の逆行列といい  $A^{-1}$  で表す

ふつうはこれを定義としているが、 $AB=E$ 、 $BA=E$  の一方がなりたてば、他方も成り立つ。すなわち、

$$\boxed{1} \quad AB=E \Leftrightarrow BA=E$$

証明  $AB=E \Rightarrow BA=E$  を示す。逆も同様である。

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  とすると、ケーリー・ハミルトンの定理により

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$

が成り立つ。この式の両辺に、右から  $B$  をかけると

$$A^2B - (a+d)AB + (ad-bc)B = O$$

$AB=E$  であるから  $A - (a+d)E + (ad-bc)B = O$  ゆえに

$$A = (a+d)E - (ad-bc)B$$

これから  $A$  と  $B$  は交換可能、すなわち  $AB=BA$  であるから

$$BA=E$$

(証明終)

したがって  $AB=E$ 、 $BA=E$  の一方を逆行列の定義としてもよい

また、この証明から以下も明らかである。

$$\boxed{2} \quad AB=kE \ (k \neq 0) \Rightarrow A=pB+qE \Rightarrow AB=BA$$

### ■ 例題 $A, B$ が $AB=3A+2E$ を満たしているとき、 $A$ は逆行列をもつことを示せ。

解  $AB-3A=2E$  より  $A \cdot \frac{1}{2}(B-3E)=E$  よって  $A^{-1}=\frac{1}{2}(B-3E)$

逆行列については、次の公式が成り立つことも容易に示せる。

$$\boxed{3} \quad (A^{-1})^{-1}=A, \quad (kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}, \quad (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

### ■ 逆行列の存在について

$$\boxed{4} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ は逆行列をもたない} \Leftrightarrow \Delta(A) = ad-bc=0$$

この条件は次のようにも表される。

$$\boxed{5} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ とするとき,} \\ \Delta(A) = ad-bc=0 \Leftrightarrow \vec{u}=\vec{0} \text{ または } \vec{v}=\vec{0} \text{ または } \vec{u} \parallel \vec{v}$$

また、次もよく用いられる。

$$\boxed{6} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ として, } A\vec{x} = \vec{0} \text{ のとき} \\ \vec{x} \neq \vec{0} \text{ となる } \vec{x} \text{ が存在する} \Leftrightarrow A^{-1} \text{ が存在しない} \Leftrightarrow \Delta(A)=0$$

積の逆行列の存在については

$$\Delta(AB) = \Delta(A) \cdot \Delta(B) \quad \dots\dots (*)$$

を用いて、次が成り立つ。

$$\boxed{7} \quad \Delta(AB) \neq 0 \Leftrightarrow \Delta(A) \neq 0 \text{ かつ } \Delta(B) \neq 0 \\ (AB)^{-1} \text{ が存在する} \Leftrightarrow A^{-1}, B^{-1} \text{ がともに存在する} \\ \boxed{7}' \quad \Delta(AB) = 0 \Leftrightarrow \Delta(A) = 0 \text{ または } \Delta(B) = 0 \\ (AB)^{-1} \text{ が存在しない} \Leftrightarrow A^{-1}, B^{-1} \text{ の少なくとも一方が存在しない}$$

(\*) の証明は、成分を用いて計算すればよい。

証明  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$  とすると、 $AB = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$

$$\Delta(AB) = (ap+br)(cq+ds) - (aq+bs)(cp+dr)$$

$$= adps + bcqr - adqr - bcps = (ad-bc)(ps-qr) = \Delta(A) \cdot \Delta(B) \quad (\text{証明終})$$