

## 行列のn乗の解法

行列の累乗は、 $A$  を正方行列として

$$A^1=A, \quad A^2=AA, \quad A^3=A^2A, \quad \dots$$

のように定義される。一般に  $n$  を正の整数とすると

$$A^n=A^{n-1}A, \quad A^0=E \quad (E \text{ は単位行列})$$

このとき、次の指数法則が成り立つ。

$$A^m A^n = A^{m+n}, \quad (A^m)^n = A^{mn} \quad \dots (*)$$

ただし、一般に交換法則は成り立たないから、 $(AB)^n = A^n B^n$  も成り立たない。

さらに、 $A$  の逆行列  $A^{-1}$  が存在するとき、負の整数  $-n$  について  $A^{-n}=(A^{-1})^n$  で定義すれば、すべての整数  $m, n$  について、指数法則 (\*) を拡張することができる。

### ■ $A^m=kE$ となる場合

$A^2, A^3, \dots$  と計算して、 $A^m=kE$  となる場合は、 $n$  を  $m$  で割った余りで分類して求める。

たとえば、 $A^3=-2E$  の場合

$$n=3m-2=3(m-1)+1 \text{ のとき } A^n=(A^3)^{m-1}A=(-2E)^{m-1}A=(-2)^{m-1}A$$

$$n=3m-1=3(m-1)+2 \text{ のとき } A^n=(A^3)^{m-1}A^2=(-2E)^{m-1}A^2=(-2)^{m-1}A^2$$

$$n=3m \text{ のとき } A^n=(A^3)^m=(-2E)^m=(-2)^m E$$

### ■ $A^{-1}$ が存在しない場合

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  の行列式  $\Delta(A)=ad-bc$  が 0 の場合、 $A^{-1}$  が存在せず、 $A^2=(a+d)A$  となるから

$$A^n=(a+d)^{n-1}A$$

### ■ 特別な形の行列

$$(1) \text{ 対角行列 } A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \text{ のとき } A^n=\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix}$$

$ad \neq 0$  ならば  $A^{-1}$  が存在し、 $n$  が負の整数でも成り立つ。

$$(2) \text{ 三角行列 } A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \text{ のとき } A^n=\begin{pmatrix} a^n & b(a^{n-1}+a^{n-2}d+\dots+d^{n-1}) \\ 0 & d^n \end{pmatrix}$$

ここで、(1, 2) 成分は、 $a \neq d$  のとき  $\frac{b(a^n-d^n)}{a-d}$ ,  $a=d$  のとき  $na^{n-1}b$

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \text{ のときは } A^n=\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ c(a^{n-1}+a^{n-2}d+\dots+d^{n-1}) & d^n \end{pmatrix}$$

証明が必要なときは、数学的帰納法を用いればよい。

### ■ 数学的帰納法を用いる

$A^2, A^3, \dots$  を計算して  $A^n$  を推測し、数学的帰納法を用いて証明する。

例題1  $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$  のとき、 $A^n$  を求めよ。(  $n$  は自然数)

解  $A^2=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $A^3=\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$  から  $A^n=\begin{pmatrix} 2n+1 & 2n \\ -2n & -2n+1 \end{pmatrix} \dots \textcircled{1}$  と推測される。

(i)  $n=1$  のとき、 $A=\begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 & 2 \cdot 1 \\ -2 \cdot 1 & -2 \cdot 1 + 1 \end{pmatrix}$  から、 $\textcircled{1}$  は成り立つ。

(ii)  $n=k$  のとき、 $\textcircled{1}$  が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k A = \begin{pmatrix} 2k+1 & 2k \\ -2k & -2k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2k+3 & 2k+2 \\ -2k-2 & -2k-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(k+1)+1 & 2(k+1) \\ -2(k+1) & -2(k+1)+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ゆえに、 $n=k+1$  のときも  $\textcircled{1}$  は成り立つ。

(i), (ii) より、 $\textcircled{1}$  はすべての自然数  $n$  について成り立つ。

### ■ 二項定理を用いる

行列  $B$  が  $B^2=O$  を満たすとき、 $B$  はべき零行列であるという。このとき  $B^n=O$  ( $n \geq 2$ ) が成り立つ。ある行列  $A$  が、べき零行列  $B$  を用いて

$$A=pE+qB$$

と表されるとき、二項定理を用いて

$$A^n=(pE+qB)^n=p^n E+n p^{n-1} qB$$

から  $n$  乗が計算できる。

例題2  $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$  に対し、 $A=2E-3B$  とするとき、 $B^2, A^n$  を求めよ。

解 ケーリー・ハミルトンの定理により

$$B^2=\{2+(-2)\}B-\{2 \cdot (-2)-4 \cdot (-1)\}E=O \quad (O \text{ は零行列})$$

であるから、 $n \geq 2$  のとき  $B^n=O$ 、二項定理を用いると

$$\begin{aligned} A^n &= (2E-3B)^n = (2E)^n - n(2E)^{n-1} \cdot 3B = 2^n E - n 2^{n-1} \cdot 3B \\ &= 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - n 2^{n-1} \cdot 3 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3n+1)2^n & -3n \cdot 2^{n+1} \\ 3n \cdot 2^{n-1} & (3n+1)2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■ ケーリー・ハミルトンの定理の利用1 (割り算の利用)

$$A^2 - pA + qE = O$$

とする。  $n \geq 2$  のとき、  $x^n$  を  $x^2 - px + q$  で割った商を  $Q(x)$ 、余りを  $ax + b$  とすると

$$x^n = (x^2 - px + q)Q(x) + ax + b \quad \dots (**)$$

これから  $A^n = (A^2 - pA + qE)Q(A) + aA + bE$  となり、  $A^2 - pA + qE = O$  であるから

$$A^n = aA + bE$$

と表される。ここで、  $a, b$  は次のようにして求められる。

(i)  $x^2 - px + q = 0$  が異なる2つの解  $\alpha, \beta$  をもつとき、(\*\*)は

$$x^n = (x - \alpha)(x - \beta)Q(x) + ax + b$$

$$x = \alpha, x = \beta \text{ を両辺に代入すると } a\alpha + b = \alpha^n, a\beta + b = \beta^n$$

$$\text{これらを連立して解くと } a = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, b = -\frac{\alpha^n\beta - \alpha\beta^n}{\alpha - \beta}$$

(ii)  $x^2 - px + q = 0$  が重解  $\alpha$  をもつとき、(\*\*)は

$$x^n = (x - \alpha)^2 Q(x) + ax + b$$

$$x = \alpha \text{ を両辺に代入すると } a\alpha + b = \alpha^n \text{ ゆえに } b = \alpha^n - a\alpha$$

これを(\*\*)に代入すると

$$x^n - \alpha^n = (x - \alpha)^2 Q(x) + a(x - \alpha)$$

両辺を  $x - \alpha$  で割ると

$$x^{n-1} + x^{n-2}\alpha + \dots + \alpha^{n-1} = (x - \alpha)Q(x) + a$$

$$x = \alpha \text{ を両辺に代入すると } a = n\alpha^{n-1}, b = -(n-1)\alpha^n$$

例題3  $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  のとき、  $A^n$  を求めよ。(  $n$  は自然数)

解 ケーリー・ハミルトンの定理により  $A^2 - A - 6E = O \quad \dots \textcircled{1}$  が成り立つ。

$n \geq 2$  のとき、  $x^n$  を  $x^2 - x - 6$  で割った商を  $Q(x)$ 、余りを  $ax + b$  とおくと

$$x^n = (x - 3)(x + 2)Q(x) + ax + b \quad \dots \textcircled{2}$$

$x = 3, x = -2$  を両辺に代入すると

$$3a + b = 3^n, \quad -2a + b = (-2)^n$$

これらを  $a, b$  について解くと

$$a = \frac{3^n - (-2)^n}{5}, \quad b = \frac{2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-2)^n}{5}$$

②から、  $n \geq 2$  のとき  $A^n = (A^2 - A - 6E)Q(A) + aA + bE$  が成り立ち、①より

$$A^n = aA + bE = \begin{pmatrix} -a + b & 4a \\ a & 2a + b \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3^n + 4 \cdot (-2)^n & 4 \cdot 3^n - 4 \cdot (-2)^n \\ 3^n - (-2)^n & 4 \cdot 3^n + (-2)^n \end{pmatrix}$$

この式は  $n = 1$  のときも成り立つ。

■ ケーリー・ハミルトンの定理の利用2 (行列の漸化式の利用)

$$A^2 - pA + qE = O$$

とする。  $x^2 - px + q = 0$  が2つの解  $\alpha, \beta$  をもつとき、  $p = \alpha + \beta, q = \alpha\beta$  であるから

$$A^2 - (\alpha + \beta)A + \alpha\beta E = O$$

(i)  $\alpha \neq \beta$  のとき

$$A(A - \beta E) = \alpha(A - \beta E) \text{ より } A^n(A - \beta E) = \alpha^n(A - \beta E)$$

$$A(A - \alpha E) = \beta(A - \alpha E) \text{ より } A^n(A - \alpha E) = \beta^n(A - \alpha E)$$

$$\text{辺々引くと } (\alpha - \beta)A^n = (\alpha^n - \beta^n)A - (\alpha^n\beta - \alpha\beta^n)E$$

$$\text{よって } A^n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}A - \frac{\alpha^n\beta - \alpha\beta^n}{\alpha - \beta}E$$

(ii)  $\alpha = \beta$  のとき

$$A(A - \alpha E) = \alpha(A - \alpha E) \text{ より } A^n(A - \alpha E) = \alpha^n(A - \alpha E)$$

$$\text{両辺を } \alpha^n \text{ で割って、 } n \text{ を } k \text{ とおくと } \frac{A^{k+1}}{\alpha^{k+1}} - \frac{A^k}{\alpha^k} = \frac{1}{\alpha}(A - \alpha E)$$

$$n \geq 2 \text{ のとき、両辺について } \sum_{k=1}^{n-1} \text{ とすると } \frac{A^n}{\alpha^n} - \frac{A}{\alpha} = \frac{n-1}{\alpha}(A - \alpha E)$$

$$\text{よって } A^n = n\alpha^{n-1}A - (n-1)\alpha^n E$$

この式は  $n = 1$  のときも成り立つ。

■ 行列の対角化

$A$  が、逆行列をもつ適当な行列  $P$  を用いて、  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  と対角化できるとき、

$$\text{両辺を } n \text{ 乗すると } (P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \text{ よって } A^n = P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

■ その他

(1)  $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$  とおき、  $A^{n+1} = A^n A$  から成分について漸化式をつくる。

(2)  $A = k \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  と表される場合、  $A^n = k^n \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$