

## 固有値・固有ベクトル

行列  $A$  に対して

$$A\vec{u} = k\vec{u} \quad \text{かつ} \quad \vec{u} \neq \vec{0}$$

を満たす実数  $k$  および (列) ベクトル  $\vec{u}$  が存在するとき

$k$  を  $A$  の固有値,  $\vec{u}$  を固有値  $k$  に対応する固有ベクトル  
という。固有値・固有ベクトルを求めるためには、与式を変形して

$$A\vec{u} - k\vec{u} = \vec{0} \quad \text{より} \quad (A - kE)\vec{u} = \vec{0}$$

とする。これを満たす  $\vec{0}$  でない  $\vec{u}$  が存在するための必要十分条件は

$A - kE$  が逆行列をもたない すなわち  $A - kE$  の行列式について  $\Delta(A - kE) = 0$   
であり、これが固有値  $k$  を求める方程式 (固有方程式) となる。

$$A\vec{u} = k\vec{u} \text{ を満たす } \vec{0} \text{ でない } \vec{u} \text{ が存在} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta(A - kE) = 0$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  のとき,  $A - kE = \begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix}$  であるから, 固有方程式  $\Delta(A - kE) = 0$  は

$$(a-k)(d-k) - bc = 0 \quad \text{すなわち} \quad k^2 - (a+d)k + (ad-bc) = 0$$

となる。この  $k$  についての 2 次方程式の実数解が  $A$  の固有値である。

固有値  $k_1, k_2$  に対応する固有ベクトルをそれぞれ  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$  とすると

$$A\vec{u}_1 = k_1\vec{u}_1, \quad A\vec{u}_2 = k_2\vec{u}_2 \quad \text{より} \quad (A - k_1E)\vec{u}_1 = \vec{0}, \quad (A - k_2E)\vec{u}_2 = \vec{0}$$

であるから, 比  $x_1 : y_1$  と  $x_2 : y_2$  が

$$\begin{pmatrix} a-k_1 & b \\ c & d-k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a-k_2 & b \\ c & d-k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

によって定められる。すなわち

$$x_1 : y_1 = (-b) : (a-k_1) = (d-k_1) : (-c)$$

$$x_2 : y_2 = (-b) : (a-k_2) = (d-k_2) : (-c)$$

これから, 固有ベクトルについて次の性質が成り立つ。

固有値  $k_1, k_2$  に対応する固有ベクトルをそれぞれ  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  とするとき

$$(1) \quad k_1 \neq k_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}_1 \not\parallel \vec{u}_2$$

$$(2) \quad p \text{ が } 0 \text{ でない実数のとき, } p\vec{u}_1 \text{ も固有値 } k_1 \text{ の固有ベクトル}$$

例題1  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$  の固有値と固有ベクトルを求めよ。

解 固有値を  $k$ , 固有ベクトルを  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  とすると, 固有方程式は

$$(1-k)(4-k) - 2 \cdot (-1) = 0 \quad \text{より} \quad k^2 - 5k + 6 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = 3, 2$$

また  $\begin{pmatrix} 1-k & 2 \\ -1 & 4-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  より

$k = 3$  のとき,  $-2x + 2y = 0, -x + y = 0$  この2式は同値であり

$$x : y = 1 : 1 \quad \text{よって} \quad \vec{u} = p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (p \text{ は } 0 \text{ でない任意の実数})$$

同様に  $k = 2$  のとき  $-x + 2y = 0$  より  $\vec{u} = q \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  ( $q$  は  $0$  でない任意の実数)

例題2  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  が異なる固有値  $k_1, k_2$  をもち, その固有ベクトルがそれぞれ  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  であるとき, 次を証明せよ。

$$\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \quad \Leftrightarrow \quad b = c$$

解  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$  とする。ベクトルの内積について

$$(k_1\vec{u}_1) \cdot \vec{u}_2 = (A\vec{u}_1) \cdot \vec{u}_2 = (ax_1 + by_1)x_2 + (cx_1 + dy_1)y_2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\vec{u}_1 \cdot (k_2\vec{u}_2) = \vec{u}_1 \cdot (A\vec{u}_2) = x_1(ax_2 + by_2) + y_1(cx_2 + dy_2) \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② の辺々を引くと

$$(k_1 - k_2)(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) = (b - c)(x_2y_1 - x_1y_2)$$

$k_1 - k_2 \neq 0$  また  $\vec{u}_1 \not\parallel \vec{u}_2$  より  $x_2y_1 - x_1y_2 \neq 0$  であるから

$$\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \quad \text{ならば} \quad \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \quad \text{より} \quad b = c$$

逆も成り立つ。

■ 固有ベクトルによる行列の対角化, 行列のn乗の計算

$A$  が, 逆行列をもつ適当な行列  $P$  を用いて,  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  と対角化できるとき,

両辺を  $n$  乗すると  $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$  よって  $A^n = P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} P^{-1}$

対角化できるための十分条件は

$A$  が異なる 2 つの実数の固有値をもつ  $\Rightarrow A$  は対角化できる

証明  $A$  の固有値を  $k_1, k_2$  ( $k_1 \neq k_2$ ), 対応する固有ベクトルを  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$  とすると

$$A\vec{u}_1 = k_1\vec{u}_1, \quad A\vec{u}_2 = k_2\vec{u}_2$$

$P = (\vec{u}_1 \ \vec{u}_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$  とおけば

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{u}_1 \ A\vec{u}_2) = (k_1\vec{u}_1 \ k_2\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} k_1x_1 & k_2x_2 \\ k_1y_1 & k_2y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \\ &= (\vec{u}_1 \ \vec{u}_2) \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで, 異なる固有値に対応する固有ベクトル  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  は平行でないから,  $P = (\vec{u}_1 \ \vec{u}_2)$  は

逆行列をもつ。よって  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$

例題3  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$  のとき,  $A^n$  を求めよ。

解 例題1 で求めた固有ベクトルを利用して

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ とすると } P^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 1 - 2 \cdot 1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{すると } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

両辺を  $n$  乗すると  $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ . したがって

$$A^n = P \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3^n + 2^{n+1} & 2 \cdot 3^n - 2^{n+1} \\ -3^n + 2^n & 2 \cdot 3^n - 2^n \end{pmatrix}$$

■ 固有値・固有ベクトルの利用

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  が異なる固有値  $k_1, k_2$  をもつとき,

これらに対応する固有ベクトルをそれぞれ  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$  とすると

$$A\vec{u}_1 = k_1\vec{u}_1, \quad A\vec{u}_2 = k_2\vec{u}_2 \quad \text{から} \quad A^n\vec{u}_1 = k_1^n\vec{u}_1, \quad A^n\vec{u}_2 = k_2^n\vec{u}_2$$

$$\text{すなわち } A^n \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^n x_1 \\ k_1^n y_1 \end{pmatrix}, \quad A^n \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2^n x_2 \\ k_2^n y_2 \end{pmatrix}$$

これらから  $A^n \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^n x_1 & k_2^n x_2 \\ k_1^n y_1 & k_2^n y_2 \end{pmatrix} \leftarrow \text{右辺は } \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1^n & 0 \\ 0 & k_2^n \end{pmatrix}$  に等しい

$$A^n = \begin{pmatrix} k_1^n x_1 & k_2^n x_2 \\ k_1^n y_1 & k_2^n y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

例題4  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$  のとき,  $A^n$  を求めよ。

解 例題1 で求めた固有値・固有ベクトルを用いて

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

これらから  $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n \\ 3^n \end{pmatrix}, \quad A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} \\ 2^n \end{pmatrix}$  まとめると

$$A^n \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 2^{n+1} \\ 3^n & 2^n \end{pmatrix}$$

ゆえに  $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 2^{n+1} \\ 3^n & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3^n & 2^{n+1} \\ 3^n & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3^n + 2^{n+1} & 2 \cdot 3^n - 2^{n+1} \\ -3^n + 2^n & 2 \cdot 3^n - 2^n \end{pmatrix}$