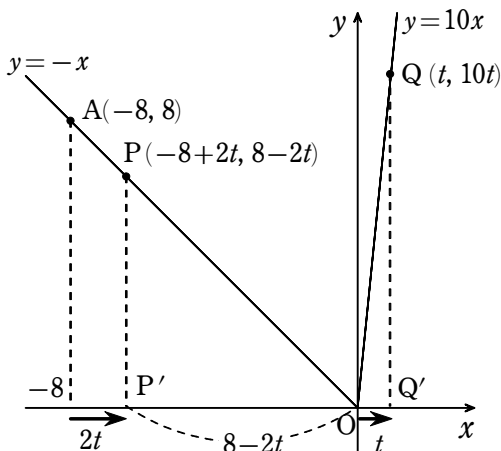


第2問

☒ この程度の図をかいて考える

Pのx座標は $-8+2t$, y座標は $y=-x$ のxに $-8+2t$ を代入して $8-2t$. PがOに到達するのは $-8+2t=0$ から $t=\boxed{4}$ のとき. $0 < t < 4$ で考える.

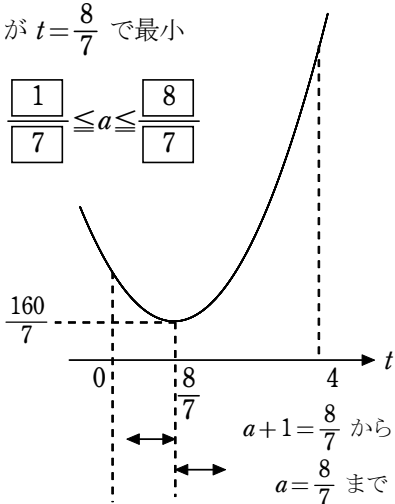


(1) $S = \triangle OPP' + \triangle OQQ'$
 $= \frac{1}{2} \times (8-2t) \times (8-2t) + \frac{1}{2} \times t \times 10t$
 $= 2(t-4)^2 + 5t^2$
 $= \boxed{7}t^2 - \boxed{16}t + \boxed{32}$
 $= 7\left(t - \frac{8}{7}\right)^2 + \frac{160}{7}$

$t = \frac{\boxed{8}}{\boxed{7}}$ で S は最小値 $\frac{\boxed{160}}{\boxed{7}}$ をとる. ← ☒ 下の程度の図を描く, 実際はもっと上にあり尖っている

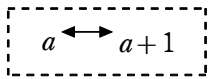
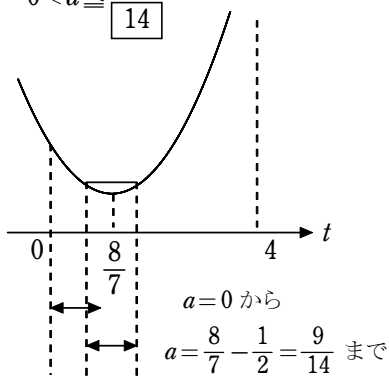
(i) S が $t = \frac{8}{7}$ で最小

$$\frac{\boxed{1}}{\boxed{7}} \leq a \leq \frac{\boxed{8}}{\boxed{7}}$$



(ii) S が $t = a$ で最大

$$0 < a \leq \frac{\boxed{9}}{\boxed{14}}$$



定数項は 0

(2) $y=2x^2$ のグラフを平行移動したもので O を通るものは $y=2x^2+bx \dots \textcircled{1}$ とおける.

① と $y=-x$ の交点の x 座標は 0 と $2t-8$ であり $2x^2+bx=-x$ の実数解. $x \neq 0$ となる解である $2t-8$ は $2x+b=-1$ を満たすから $2(2t-8)+b=-1$ より $4t+b=15 \dots \textcircled{2}$

① と $y=10x$ についても同様で $2x^2+bx=10x \rightarrow 2x+b=10 \rightarrow 2t+b=10 \dots \textcircled{3}$

②, ③ より $t = \frac{\boxed{5}}{\boxed{2}}, b = 5, y = 2x^2 + 5x = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$

平行移動は, x 軸方向に $\frac{\boxed{-5}}{\boxed{4}}$, y 軸方向に $\frac{\boxed{-25}}{\boxed{8}}$.

☒ $y=2x^2+bx$ に P の座標を代入したときは $2t-8$ で割ってから計算する, 因数分解をするのは得策ではない ($t \neq 4$)

第3問

$$AP = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\triangle AOP = \frac{1}{2} \times AP \times \frac{OD}{2} = \frac{1}{2} \times AO \times PO$$

$$OD = 2 \times AO \times PO \div AP = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$$\begin{aligned} \cos \angle OAD &= \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \\ &= 2\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 - 1 = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

☞ 二倍角の公式
知っている公式は
積極的に使うこと

$$AC = AB \cos \angle OAD = 6 \times \frac{4}{5} = \frac{24}{5}$$

$$\sin \angle OAD = \frac{3}{5}, \quad BC = AB \sin \angle OAD = \frac{18}{5} \quad \text{から}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times AC \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{24}{5} \times \frac{18}{5} = \frac{216}{25}$$

$\triangle ABC$ の内接円の半径 r は

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times (\triangle ABC \text{ の周の長さ}) \times r \quad \text{から}$$

$$r = 2 \times \frac{216}{25} \div \left(6 + \frac{24}{5} + \frac{18}{5}\right) = \frac{6}{5}$$

(1) $\triangle CEA$ と $\triangle ABC$ は合同, 内接円 Q と R の半径を

$$\text{それぞれ } r_Q, r_R \text{ とすると } r_Q = r_R = r = \frac{6}{5}$$

$$QR = AC - r_Q - r_R = \frac{12}{5} \quad \text{よって } QR = r_Q + r_R$$

したがって, 内接円 Q と R は外接する ②。

$$(2) \quad AQ = \sqrt{\left(\frac{24}{5} - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$$

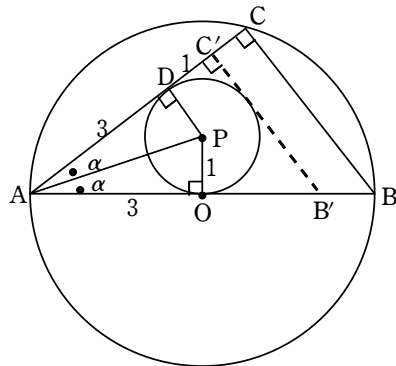
中心 P, Q はともに $\angle BAC$ の二等分線上にある。

すなわち, 3点 A, P, Q は直線上にあるから

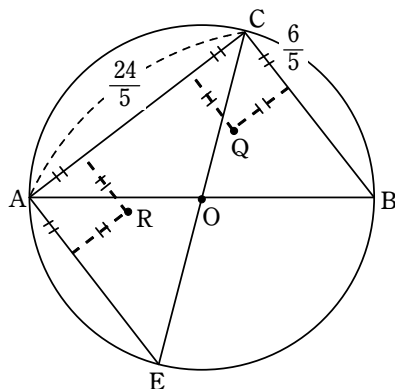
$$PQ = AQ - AP = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$PQ < r_Q, PQ < 1$ であるから, 点 P は内接円 Q の内部にあり, 点 Q は円 P の内部にある ②。

$$\frac{6}{5} = \frac{\sqrt{36}}{5}$$



別解 円 P が内接する直角三角形 $AB'C'$ を考えると辺の長さは $3, 4, 5$
 $\triangle AB'C' \sim \triangle ABC$ で相似比は
 $AB' : AB = 5 : 6$ だから $r = \frac{6}{5}$



☞ 上の別解から $AP \times \frac{6}{5}$ と
気付くとカシコイ