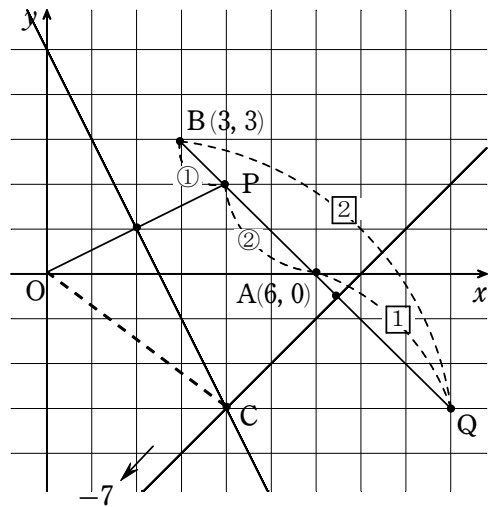
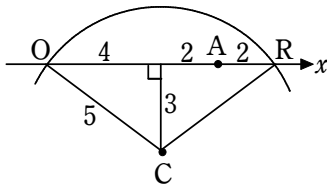


第1問 [1]

解答枠の形から点の座標は整数, とりあえず
方眼を使って 図を描いてみるのがオススメ。

- (1) $P(\boxed{4}, \boxed{2}), Q(\boxed{9}, \boxed{-3})$
 (2) OP の垂直二等分線は $y = \boxed{-2}x + \boxed{5}$
 PQ の垂直二等分線は $y = x - \boxed{7}$
 円 C の中心が $(4, -3)$, 半径が 5 だから
 $(x - \boxed{4})^2 + (y + \boxed{3})^2 = \boxed{25}$
 (3) R は OA を $\boxed{4} : 1$ に外分する。



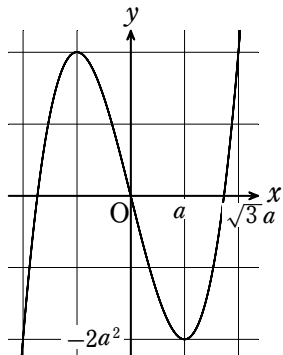
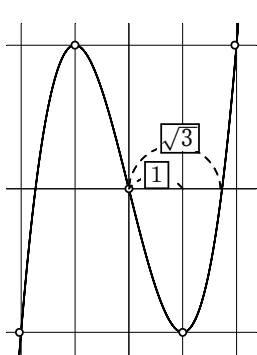
第2問

注 以下の手順で図が描けるとよい

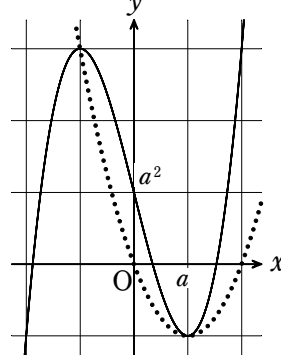
極値のある3次関数の概形

$$y = x^3 - 3a^2x = x(x^2 - 3a^2)$$

$$y = f(x) = x^3 - 3a^2x + a^3$$



y 方向へ a^3
だけ平行移動



$y = f(x)$ は、 $x = -a$ で極大値 $f(-a) = 3a^3$ ， $x = a$ で極小値 $f(a) = -a^3$ をとる。

求める放物線を $y = Ax^2 - Bx$ とおくと、

2点 $(-a, 3a^3)$ ， $(a, -a^3)$ を通ることから

$$3a^3 = Aa^2 + Ba, \quad -a^3 = Aa^2 - Ba$$

$a > 0$ から上式の両辺を a で割って

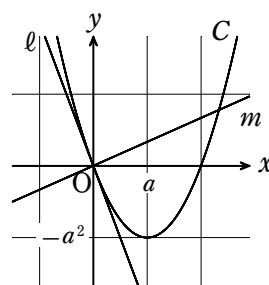
$$3a^2 = Aa + B, \quad -a^2 = Aa - B$$

これらから $A = a$ ， $B = 2a^2$ ， $y = a x^2 - 2a^2 x$

原点 O における C の接線 l の方程式は

$$y = -2a^2 x \quad \leftarrow \text{注 } y = ax^2 + bx + c \text{ の点 } (0, c) \text{ における}$$

接線は $y = bx + c$ (準公式，導出は容易)



原点を通り l に垂直な直線 m (法線) の方程式は、傾きが $\frac{1}{2a^2}$ だから $y = \frac{1}{2} a^2 x$

x 軸に関して C と対称な放物線は $D: y = -ax^2 + 2a^2x$

D と l の交点の x 座標は $-ax^2 + 2a^2x = -2a^2x$

$x \neq 0$ である解は $-ax + 2a^2 = -2a^2$ から $x = 4a$

D と l で囲まれた図形の面積 S は

$$S = a \cdot \frac{1}{6} (4a)^3 = \frac{32}{3} a^4 \quad \leftarrow \text{注 } \frac{1}{6} \text{ 公式}$$

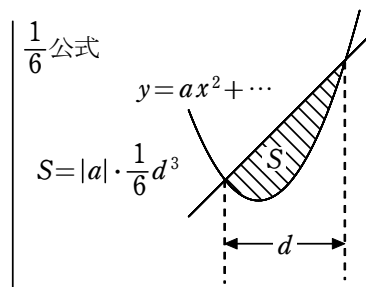
C と m の交点の x 座標は $ax^2 - 2a^2x = \frac{1}{2a^2}x$ ， $x \neq 0$ より

$$ax - 2a^2 = \frac{1}{2a^2} \quad \text{よって} \quad x = 2a + \frac{1}{2a^3} = \frac{4a^4 + 1}{2a^3}$$

$S = T$ となるのは $4a = \frac{4a^4 + 1}{2a^3}$ のときで $a^4 = \frac{1}{4}$ $\leftarrow \text{注 } C \text{ と } D \text{ が } x \text{ 軸に関して対称だから}$

$$S = \frac{32}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

l と m も対称，すなわち l の傾きは $-2a^2 = -1$ ，これから求めてもよい



第4問

(1) $\overrightarrow{AE} = t\vec{c} - \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}\vec{a} + \vec{c}$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}||\vec{c}|\cos\theta = 20\cos\theta$

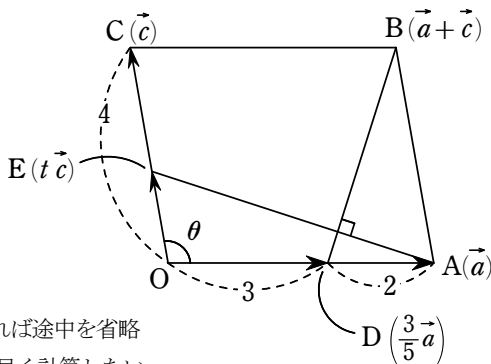
$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$ また

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DB} &= (-\vec{a} + t\vec{c}) \cdot \left(\frac{2}{5}\vec{a} + \vec{c}\right) \\ &= -\frac{2}{5}|\vec{a}|^2 + \left(\frac{2}{5}t - 1\right)\vec{a} \cdot \vec{c} + t|\vec{c}|^2 \\ &= -10 + (8t - 20)\cos\theta + 16t \\ &= 8(\cos\theta + 2)t - 10(\cos\theta + 2) \end{aligned}$$

により

$$t = \frac{5}{4} \frac{(2\cos\theta + 1)}{(\cos\theta + 2)} \dots\dots ①$$

☞ できれば途中を省略して手早く計算したい



(2) $0 \leq t \leq 1$ は $0 \leq \frac{5(2r+1)}{4(r+2)} \leq 1$, $4(r+2) > 0$ であるから

$$0 \leq 5(2r+1) \leq 4(r+2) \dots\dots ②$$

これを解くと $-\frac{1}{2} \leq r \leq \frac{1}{2}$ すなわち $-\frac{1}{2} \leq \cos\theta \leq \frac{1}{2}$ よって

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi$$

(3) $\cos\theta = -\frac{1}{8}$ のとき,

$$t = 5 \left(-2 \cdot \frac{1}{8} + 1\right) \div 4 \left(-\frac{1}{8} + 2\right) = \frac{15}{4} \div \frac{15}{2} = \frac{1}{2}$$

右図のように比をとると

$$\overrightarrow{OF} = (1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OE} = (1-s)\vec{a} + \frac{1}{2}s\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OF} = (1-u)\overrightarrow{OB} + u\overrightarrow{OD} = (1-u)(\vec{a} + \vec{c}) + \frac{3}{5}u\vec{a} = \left(1 - \frac{2}{5}u\right)\vec{a} + (1-u)\vec{c}$$

係数を比較して $1-s = 1 - \frac{2}{5}u$, $\frac{1}{2}s = 1-u$ これから $s = \frac{1}{3}$, $u = \frac{5}{6}$

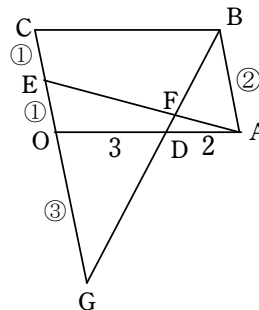
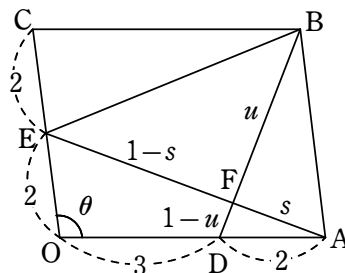
$$\overrightarrow{OF} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{c}, \quad AF : FE = s : (1-s) = 1 : 2$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8} \text{ から}$$

$$\square ABCD = OA \times OC \times \sin\theta = \frac{15\sqrt{7}}{2}$$

$$\triangle BEA = \frac{1}{2}\square ABCD = \frac{15\sqrt{7}}{4} \text{ また } EF : EA = 2 : 3 \text{ であるから}$$

$$\triangle BEF = \frac{2}{3}\triangle BEA = \frac{5\sqrt{7}}{2}$$



別解 とにかく比を求める
 $\triangle DOG \sim \triangle DAB$ 相似比 3 : 2
 $\triangle FEG \sim \triangle FAB$ 2 : 1
 から $EF : FA = 2 : 1$