

第1問 [1]

$$(1) ab = \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-3}{1-2} = \boxed{2}$$

← クロスタームはキャンセル

$$a+b = \frac{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{2}) + (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{2(1-\sqrt{6})}{1-2} = -2(1-\sqrt{6})$$

$$= \boxed{2} \left(\boxed{-1} + \sqrt{\boxed{6}} \right) \quad \leftarrow \text{解答枠の形に合わせないといけない}$$

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 4(1-2\sqrt{6}+6) - 4 = 24 - 8\sqrt{6} = \boxed{8} \left(\boxed{3} - \sqrt{\boxed{6}} \right)$$

$$(2) a^2 + b^2 + 4(a+b) = 8(3-\sqrt{6}) + 8(-1+\sqrt{6}) = \boxed{16}, \text{ これと } b = \frac{2}{a} \text{ から}$$

$$a^2 + \frac{4}{a^2} + 4a + \frac{8}{a} - 16 = 0 \quad \text{よって} \quad a^4 + \boxed{4}a^3 - \boxed{16}a^2 + \boxed{8}a + \boxed{4} = 0$$

第1問 [2]

$5 < \sqrt{n} < 6$ から $25 < n < 36$ よって $U = \{26, 27, 28, \dots, 35\}$

$P = \{28, 32\}, Q = \{30, 35\}, R = \{30\}, S = \{28, 35\}$

(1) U の要素の個数は $\boxed{10}$ 個。

(2) 右図から、空集合であるものは

$\boxed{\text{①}} P \cap R \quad \boxed{\text{④}} R \cap \bar{Q}$

(3) $\text{① } P \cup R = \{32, 28, 30\} \subset \bar{Q}$

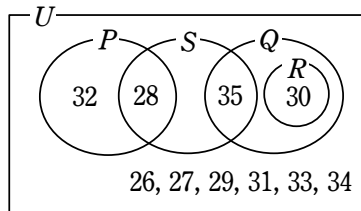
$\text{① } S \cap \bar{Q} = \{28\} \subset P$

$\text{② } \bar{Q} \cap \bar{S} \subset \bar{P} \Leftrightarrow Q \cup S \supset P, Q \cup S = \{28, 35, 30\} \not\supset P$

$\text{③ } \bar{P} \cup \bar{Q} \subset \bar{S} \Leftrightarrow P \cap Q \supset S, P \cap Q = \emptyset \not\supset S$

$\text{④ } \bar{R} \cap \bar{S} \subset \bar{Q} \Leftrightarrow R \cup S \supset Q, R \cup S = \{28, 35, 30\} \supset Q$

以上から、成り立つものは $\boxed{\text{①}}, \boxed{\text{④}}$ である。



U の部分集合 A, B について

$$\bar{A} \subset \bar{B} \Leftrightarrow A \supset B$$

また

$$\overline{P \cap Q} = \bar{P} \cup \bar{Q}$$

$$\overline{P \cup Q} = \bar{P} \cap \bar{Q}$$

第2問

$$G: y = x^2 + 2ax + 3a^2 - 6a - 36 = (x + a)^2 + 2a^2 - 6a - 36 = f(x) \quad \dots\dots①$$

$$G \text{ の頂点は } (\boxed{-}a, \boxed{2}a^2 - \boxed{6}a - \boxed{36})$$

$$p = 3a^2 - 6a - 36$$

(1) $3a^2 - 6a - 36 = -27$ から $a^2 - 2a - 3 = 0$

$$(a-3)(a+1) = 0 \text{ よって } a = \boxed{3}, \boxed{-1}$$

右図より、平行移動は x 軸方向に $\boxed{4}$, y 軸方向に $\boxed{8}$

(2) G が x 軸と共有点を持つためには、頂点の y 座標が

$$2a^2 - 6a - 36 \leq 0 \text{ から } a^2 - 3a - 18 \leq 0$$

$$(a+3)(a-6) \leq 0 \text{ よって } \boxed{-3} \leq a \leq \boxed{6} \quad \dots\dots②$$

このとき $p = 3a^2 - 6a - 36 = 3(a-1)^2 - 39$

p は、 $a = \boxed{1}$ で最小値 $\boxed{-39}$ をとり、 $a = \boxed{6}$ で最大値 $3 \cdot 5^2 - 39 = \boxed{36}$ をとる。

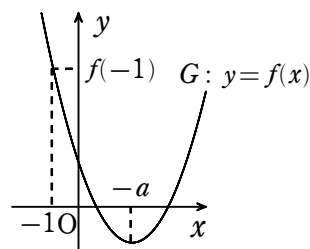
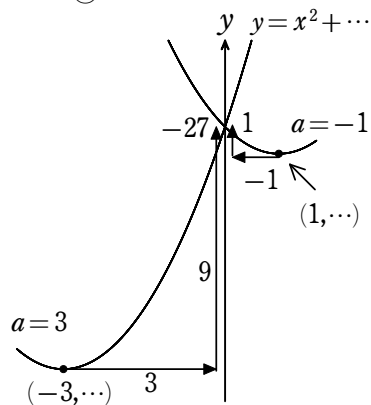
が x 軸と共有点を持ち、さらにそのすべての共有点の x 座標が -1 より大きくなるためには

$$② \text{ かつ } -a > -1 \text{ かつ } f(-1) > 0 \quad \dots(*)$$

(*) から $3a^2 - 8a - 35 > 0$ よって $(3a+7)(a-5) > 0$

$$-3 \leq a \leq 6 \text{ かつ } a < 1 \text{ かつ } \left[a < -\frac{7}{3} \text{ または } 5 < a \right]$$

以上から、求める a の範囲は $\boxed{-3} \leq a < \boxed{\frac{-7}{3}}$



第3問

$$\cos \angle ABC = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{4} \text{ から右図が描ける。}$$

$\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形だから

$$CA = \boxed{4}, \quad \cos \angle BAC = \frac{4^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{\boxed{7}}{\boxed{8}}$$

$$\sin \angle BAC = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{8}}$$

$\triangle ABC$ の外接円 O の半径は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{8}{\sqrt{15}} = \frac{\boxed{8} \sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{15}}$$

(1) BE は $\angle ABC$ の二等分線だから $AE : EC = AB : BC = 2 : 1$

$$AE = 4 \times \frac{2}{2+1} = \frac{\boxed{8}}{\boxed{3}}$$

$\triangle ABE$ に余弦定理を用いると

$$BE^2 = 4^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{7}{8} = \frac{40}{9}$$

$$\text{よって } BE = \frac{\boxed{2} \sqrt{\boxed{10}}}{\boxed{3}}$$

$BD : DE = AB : AE = 3 : 2$ だから

$$BD = \frac{2\sqrt{10}}{3} \times \frac{3}{3+2} = \frac{\boxed{2} \sqrt{\boxed{10}}}{\boxed{5}}$$

(2) $\triangle EBC \sim \triangle EAF$ であり, 相似比は

$$EB : EA = \frac{2\sqrt{10}}{3} : \frac{8}{3} = \sqrt{10} : 4$$

$$\text{よって } \frac{\triangle EBC}{\triangle EAF} = \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2 = \frac{\boxed{5}}{\boxed{8}}$$

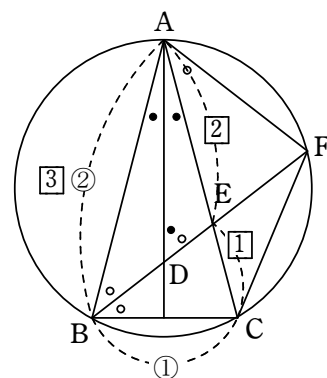
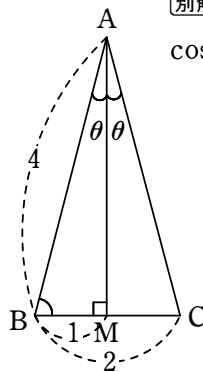
(3) $\angle FBA = \angle FBC$ から $\widehat{FA} = \widehat{FC}$ よって $FA = FC$

$\triangle FAD$ において $\angle FDA = \angle DBA + \angle DAB = \angle FAD$ (図) よって $FD = FA$

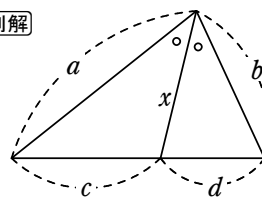
したがって $\textcircled{4} \quad FA = FC = FD$

別解

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= 1 - 2\sin^2 \theta \\ &= 1 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{8} \end{aligned}$$



別解



$$\begin{aligned} x^2 &= ab - cd \\ BE^2 &= 4 \times 2 - 4 \cdot \frac{2}{3} \times 4 \cdot \frac{1}{3} \end{aligned}$$

第4問

(1) 4つの矢印 $\swarrow \nearrow \downarrow \downarrow$ を並べる順列の総数に等しいから

$$\frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \boxed{6} \text{ (通り)}$$

(2) 3つの矢印 $\swarrow \searrow \downarrow$ を並べる順列の総数に等しいから

$$3! = \boxed{6} \text{ (通り)}$$

(3) (2)の移動を2回繰り返したものに等しいから、移動の仕方は

$$6 \times 6 = \boxed{36} \text{ 通りあり, その確率は } \frac{36}{6^6} = \frac{1}{6^4} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{1296}} \text{ である。}$$

(4)

(i) \uparrow を含むものは5つの \downarrow も必要だから $\frac{6!}{1!5!} = \boxed{6}$ (通り)

(ii) $\swarrow \searrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$ の順列で $\frac{6!}{1!1!4!} = \boxed{30}$ (通り)

(iii) \swarrow を含むものも(ii)と同様で30通り。

(iv) (i) ~ (iii) 以外の場合, \downarrow の移動は $\boxed{2}$ 回だけに決まり,

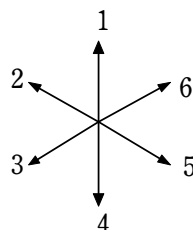
$\downarrow \downarrow \swarrow \searrow$ の順列だから $\frac{6!}{2!2!2!} = \boxed{90}$ (通り)

以上から求める移動の仕方は $6 + 30 + 30 + 90 = \boxed{156}$ (通り)

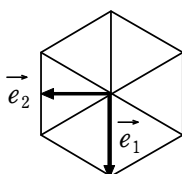
同じものを含む順列

Aをa個, Bをb個, Cをc個,
……, 計n個のものの順列は

$$\frac{n!}{a!b!c! \dots}$$



ヒント



	\uparrow	\downarrow	\swarrow	\searrow	\swarrow	\nearrow
\vec{e}_1 方向	1	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
\vec{e}_2 方向	0	0	1	-1	1	-1

表のように各矢印ごとに \vec{e}_1 方向, \vec{e}_2 方向の移動を考えると, (4) は \vec{e}_1 方向へ4の移動をするような6つの矢印の組を考えればよいことになる。