

別解 …… 通常とは異なる解法を用いたところ

第1問 [1]

(1) 点 P を通り直線 l に垂直な直線の方程式は

$$y = -\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}(x-p) + q$$

点 Q の x 座標は

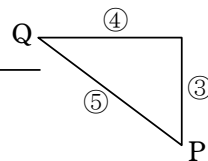
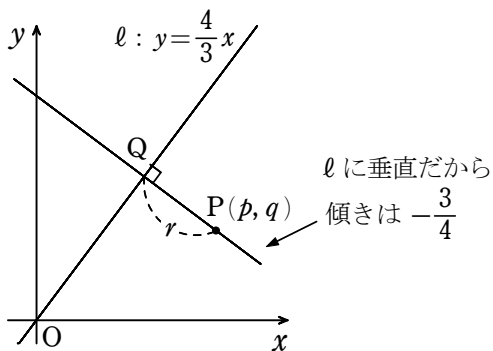
$$\frac{4}{3}x = -\frac{3}{4}(x-p) + q \quad \text{から}$$

$$16x = -9(x-p) + 12q$$

$$\text{よって } x = \frac{3}{25}(\boxed{3}p + \boxed{4}q)$$

$$r = PQ = (P \text{ と } Q \text{ の } x \text{ 座標の差}) \times \frac{5}{4} = \left| p - \frac{9}{25}p - \frac{12}{25}q \right| \times \frac{5}{4}$$

$$= \frac{1}{5} | \boxed{4}p - \boxed{3}q | \quad \dots\dots \textcircled{1}$$



(2) $r=q$ だから ① により $q = \frac{1}{5}|4p-3q| \quad \dots\dots (*)$

P は第1象限で x 軸と l の間にあるから $q < \frac{4}{3}p$ すなわち $4p-3q > 0$, (*) は

$$q = \frac{1}{5}(4p-3q) \quad \text{よって } p = \boxed{2}q$$

円 C の方程式は $(x-2q)^2 + (y-q)^2 = q^2$ であり, C は R(2, 2) を通るから

$$(2-2q)^2 + (2-q)^2 = q^2 \quad \text{すなわち } q^2 - 3q + 2 = 0$$

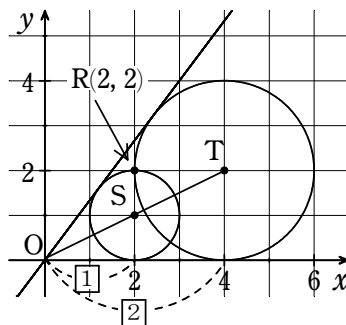
$$\text{よって } q = 1, 2$$

したがって, 求める C の方程式は

$$(x - \boxed{2})^2 + \boxed{1}^2 = \boxed{1} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$(x - \boxed{4})^2 + (y - \boxed{2})^2 = \boxed{4} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

(3) O, S, T の x 座標はそれぞれ 0, 2, 4 だから
点 O は線分 ST を $\boxed{4} 1:2$ に外分する。



第1問 [2]

$$m=2, n=1 \text{ のとき } \log_2 m^3 + \log_3 n^2 = \log_2 2^3 + \log_3 1^2 = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = \boxed{3}$$

$$m=4, n=3 \text{ のとき } \log_2 m^3 + \log_3 n^2 = \log_2 4^3 + \log_3 3^2 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = \boxed{8}$$

m, n は自然数だから $\log_2 m^3 + \log_3 n^2 \leq 3$ ……④ から

$$3 \log_2 m + 2 \log_3 n \leq 3 \text{ よって } \log_2 m + \frac{2}{3} \log_3 n \leq \boxed{1} \text{ ……⑤}$$

$1 \leq n$ から $0 \leq \log_3 n$ だから $\log_3 n$ の最小値は $\boxed{0}$, ⑤より $\log_2 m \leq 1$ よって

$m = \boxed{1}$ または $m = \boxed{2}$ でなければならない。

$$m=1 \text{ の場合, ⑤は } \log_3 n \leq \frac{3}{2}, \text{ これから } 2 \log_3 n \leq 3 \text{ よって } n^2 \leq 3^3 = \boxed{27}$$

n は自然数だから $n \leq \boxed{5}$, ④を満たす自然数 m, n の組の個数は $\boxed{5}$

$m=2$ の場合, $\log_3 n \leq 0$ から $n=1$ よって m, n の組の個数は $\boxed{1}$

以上から, ④を満たす自然数 m, n の組の個数は $\boxed{6}$

第2問

- (1) $f(x) = x^3 - px$ から $f'(x) = \boxed{3}x^{\boxed{2}} - p$
 $f(x)$ が $x = a$ で極値をとるならば、 $3a^2 - p = \boxed{0}$ が成り立つ。
 p が条件 $\boxed{0} < p < 0$ を満たす場合、 $f(x)$ は必ず極値をもつ。

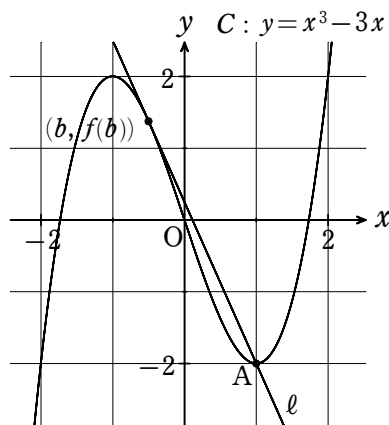
3次関数 $f(x)$ が極値をもつ
 \Leftrightarrow 2次方程式 $f'x = 0$ が
異なる2実数解をもつ

- (2) $f(x)$ が $x = \frac{p}{3}$ で極値をとることから

$$f'\left(\frac{p}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{p}{3}\right)^2 - p = 0 \quad \text{すなわち} \quad p\left(\frac{p}{3} - 1\right) = 0$$

$$p > 0 \text{ から } p = \boxed{3}$$

$f(x) = x^3 - 3x$, $A(1, -2)$, $y = f(x)$ のグラフは右図で、
 $x = \boxed{-1}$ で極大値をとり、 $x = \boxed{1}$ で極小値をとる。



点 $(b, f(b))$ における C の接線 l の方程式は

$$y = (\boxed{3}b^2 - \boxed{3})(x - b) + f(b)$$

これが $A(1, -2)$ を通るから

$$-2 = (3b^2 - 3)(1 - b) + b^3 - 3b \quad \text{すなわち} \quad \boxed{2}b^3 - \boxed{3}b^2 + 1 = 0 \quad \leftarrow b = 1 \text{ は自明な解}$$

$$(b - 1)^2(2b + 1) = 0 \quad \text{よって} \quad b = \boxed{1}, \frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}$$

$f'(b) = 3b^2 - 3 \neq 0$ だから $b \neq 1$ したがって $b = -\frac{1}{2}$

$$l \text{ の方程式は } y = -\frac{9}{4}(x - 1) - 2 \text{ から } y = \frac{\boxed{-9}}{\boxed{4}}x + \frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}$$

$A(1, -2)$ を頂点とし、原点を通る放物線 D の方程式は

$$y = 2(x - 1)^2 - 2 = \boxed{2}x^2 - \boxed{4}x$$

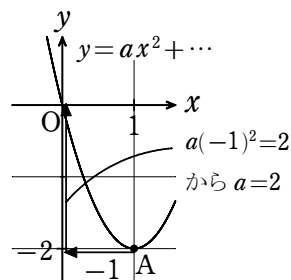
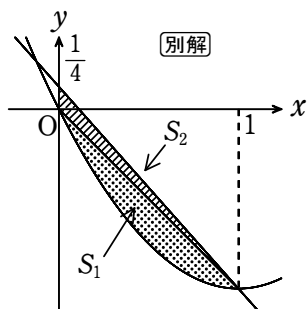
l と D で囲まれた図形のうち、 $x \geq 0$ の領域に含まれる

部分の面積 S は

$$S = S_1 + S_2 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \frac{1}{6} \text{公式} \\ \text{三角形} \end{array}$$

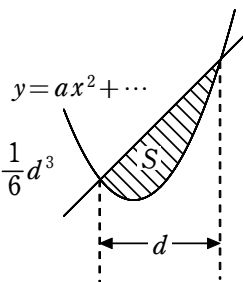
$$= 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{\boxed{11}}{\boxed{24}}$$



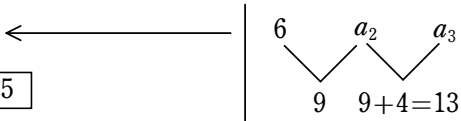
$$\frac{1}{6} \text{公式}$$

$$S = |a| \cdot \frac{1}{6} d^3$$



第3問

(1) $a_2=6+9=\boxed{15}$, $a_3=15+13=\boxed{28}$



$\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項は $9+(n-1)\cdot 4=\boxed{4}n+\boxed{5}$

$\{a_n\}$ の一般項は n の 2 次式だから $a_n=pn^2+qn+r$ とおくと

$a_1=p+q+r=6$, $a_2=4p+2q+r=15$, $a_3=9p+3q+r=28$ ← 別解

これを連立して解くと $p=2$, $q=3$, $r=1$ よって $a_n=\boxed{2}n^{\boxed{2}}+\boxed{3}n+\boxed{1}$ ……①

(2) $b_1=\frac{2}{5}$, $b_2=\frac{a_1}{a_2-1}b_1=\frac{6}{15-1}\cdot\frac{2}{5}=\frac{\boxed{6}}{\boxed{35}}$

$a_{n+1}=a_n+(4n+5)=2n^2+7n+6$ から

$b_{n+1}=\frac{a_n}{a_{n+1}-1}b_n=\frac{2n^2+3n+1}{2n^2+7n+5}b_n=\frac{(n+1)(2n+1)}{(n+1)(2n+5)}b_n=\frac{\boxed{2}n+\boxed{1}}{\boxed{2}n+\boxed{5}}b_n$ ……③

$c_n=(2n+1)b_n$ とすると $c_{n+1}=(2n+3)b_{n+1}$, これらと ③ から

$\frac{c_{n+1}}{2n+3}=\frac{2n+1}{2n+5}\cdot\frac{c_n}{2n+1}$ すなわち $(2n+\boxed{5})c_{n+1}=(2n+\boxed{3})c_n$

$d_n=(2n+\boxed{3})c_n$ とおくと, $d_{n+1}=(2n+5)c_{n+1}$ だから, すべての自然数 n に対して,

$d_{n+1}=d_n$ が成り立つ. $c_1=3b_1=\frac{6}{5}$ から $d_1=5c_1=\boxed{6}$ だから $d_n=6$ である.

$c_n=\frac{d_n}{2n+3}=\frac{6}{2n+3}$

$b_n=\frac{c_n}{2n+1}=\frac{6}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{\boxed{3}}{2n+1}-\frac{\boxed{3}}{2n+3}$

$S_n=b_1+b_2+\dots+b_n=\left(\frac{3}{3}-\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{7}\right)+\dots+\left(\frac{3}{2n+1}-\frac{3}{2n+3}\right)$

$=1-\frac{3}{2n+3}=\frac{\boxed{2}n}{\boxed{2}n+\boxed{3}}$

第4問

(1) $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OL} = (0, 0, 2) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 2)$

四角形 KLMN が平行四辺形であるから

$$\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{MN} \leftarrow \textcircled{2}$$

$$\overrightarrow{MN} = (t, 3, 3) - (3, 3, s) = (t-3, 0, 3-s)$$

$$t-3 = -1, 3-s = 2 \text{ よって } s = \textcircled{1}, t = \textcircled{2}$$

N は FG を 1 : $\textcircled{2}$ に内分する。

$$\overrightarrow{LM} = (3, 3, 1) - (1, 0, 0) = (2, 3, 1)$$

$$\overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{LM} = (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = \textcircled{0}$$

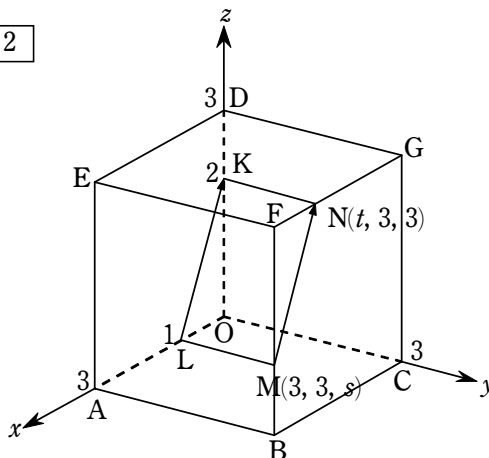
$$|\overrightarrow{LK}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{\textcircled{5}}$$

$$|\overrightarrow{LM}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{\textcircled{14}}$$

$\overrightarrow{LK} \perp \overrightarrow{LM}$ だから、四角形 KLMN の面積は

$$\sqrt{5} \sqrt{14} = \sqrt{\textcircled{70}}$$

LK//MN, LK=MN から
KO=FM, LO=FN
s=1, t=2 は自明



(2) $\overrightarrow{OP} = (p, q, r)$ は \overrightarrow{LK} および \overrightarrow{LM} と垂直であるから $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{LM} = \textcircled{0}$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{LK} = -p + 2r = 0, \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{LM} = 2p + 3q + r = 0$$

$$\text{よって } p = \textcircled{2}r, q = \frac{-2p-r}{3} = \frac{\textcircled{-5}}{\textcircled{3}}r$$

さらに $\overrightarrow{PL} = (1-p, -q, -r)$ から

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PL} = p(1-p) - q^2 - r^2 = 2r(1-2r) - \frac{25}{9}r^2 - r^2 = 2r - \frac{70}{9}r^2 = 0$$

$$\overrightarrow{OP} \neq \vec{0} \text{ から } r \neq 0, \text{ よって } r = \frac{\textcircled{9}}{\textcircled{35}}, \overrightarrow{OP} = \left(\frac{18}{35}, -\frac{15}{35}, \frac{9}{35} \right) = \frac{3}{35}(6, -5, 3)$$

$$|\overrightarrow{OP}| = \frac{3}{35} \sqrt{6^2 + (-5)^2 + 3^2} = \frac{\textcircled{3} \sqrt{\textcircled{70}}}{\textcircled{35}}$$

三角錐 OLMN の体積は

$$\frac{1}{3} \Delta LMN \cdot |\overrightarrow{OP}| = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{70}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{70}}{35} = \textcircled{1}$$