

2018年センター試験と「線分比の瞬間公式」について

「線分比の瞬間公式」

$\triangle ABC$ において、辺 AB を $m:l$ の比に内分する点を N 、辺 AC を $n:l$ の比に内分する点を M 、 BM と CN の交点を P 、 AP と辺 BC の交点を L とする。ここまですべて仮定。(図1、太線部の比の数字の等しいことがポイント) このとき、チェバの定理およびメネラウスの定理を用いると

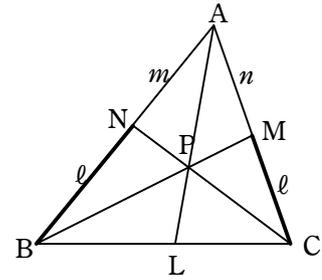


図1

(1) $BL:LC=n:m$ (2) $AP:PL=m+n:l$ (図2)

さらに対称性から図3のようになる、これが結論。(この図で覚えればよい) 仮定として AB 、 AL 上で比が与えられていてもよい。(図4)

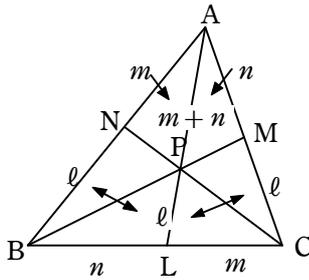


図2

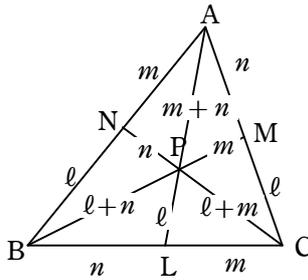


図3

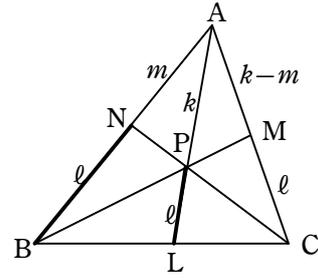


図4

「瞬間公式」は記述問題では断りなしに使えないだろうが、穴埋め問題や計算のチェックには有効だと思われる。

参考 数研通信86号(2016年9月) 交点の位置ベクトルの瞬間的解法 白井達哉(岐阜県立長良高)

例題1 センター試験 数学IA第5問 (2018/1/14)

$AB=2$ 、 $AC=1$ 、 $\angle A=90^\circ$ 、 $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とすると

$$BD:DC=AB:AC=2:1 \text{ から } BD=BC \times \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

点 A を通り点 D で辺 BC に接する円と辺 AB との交点を E とすると、方べきの定理から

$$AB \cdot BE = BD^2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{20}{9} \text{ から } BE = \frac{10}{9}$$

点 F は直線 AC と直線 DE の交点で、次に $\frac{CF}{AF}$ から CF の長さを求めるのが問題。(図5)

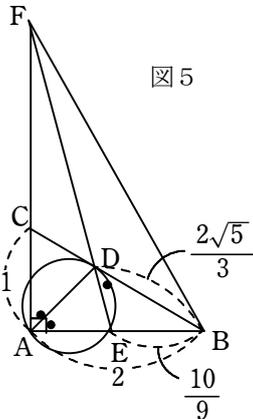


図5

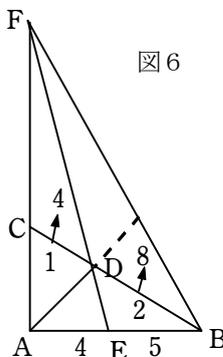


図6

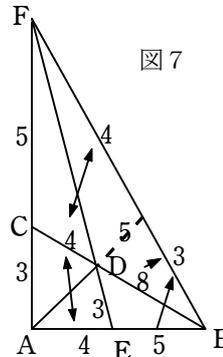


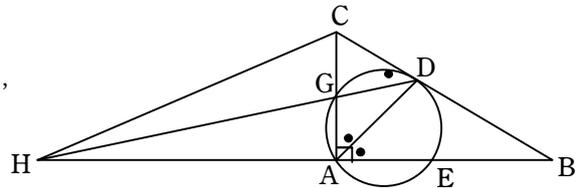
図7

図6のように比をとって「瞬間公式」を当てはめると図7になる。(数字は線分の長さではなく、比であることに注意)すると容易に次が得られる。

$$\frac{CF}{AF} = \frac{5}{8}, \quad CF = AC \times \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

余談 直線 AC と直線 DE の交点 F が辺 AC の端点のどちら側かという問いで、比 $\frac{BE}{BD}$ と $\frac{AB}{BC}$ の大小で判断させているが、分かりにくかった。接弦定理から $\angle BDE = 45^\circ$, $AB > AC$ から $\angle B < 45^\circ$ によって $\angle DEA = \angle BDE + \angle B < 90^\circ$ とするのが簡明では。

円と AC の交点を G, DG と AB の交点を H とすると, HG は $\angle CHA$ の二等分線, したがって D は $\triangle CHA$ の傍心のひとつ。



例題 2 センター試験 数学 II B 第 4 問 (3) (2018/1/14)

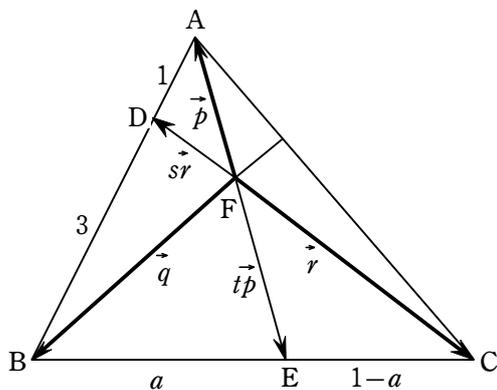


図 8

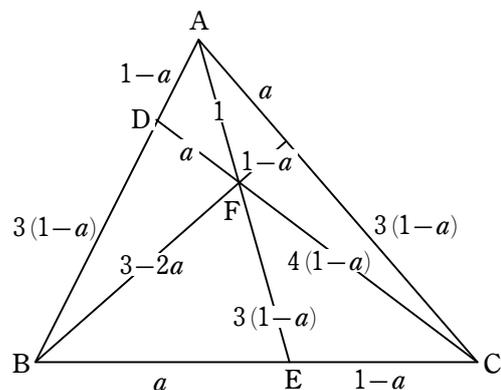


図 9

問題の条件を表した図 8 に「瞬間公式」を当てはめるために

$$AD : DB = 1 : 3 = (1-a) : 3(1-a)$$

としたものが図 9 である。これから

$$\overrightarrow{FD} = s\vec{r} \text{ と } \overrightarrow{FC} = \vec{r} \text{ は反対向きで、大きさの比は } a : 4(1-a) \text{ であるから} \quad s = -\frac{a}{4(1-a)}$$

$$\overrightarrow{FE} = t\vec{p} \text{ と } \overrightarrow{FA} = \vec{p} \text{ は反対向きで、大きさの比は } 3(1-a) : 1 \text{ であるから} \quad t = -3(1-a)$$

となる。

数学 I ・ 数学 A 第 3 問 ~ 第 5 問は、いずれか 2 問を選択し、解答しなさい。

第 5 問 (選択問題) (配点 20)

$\triangle ABC$ において $AB = 2$, $AC = 1$, $\angle A = 90^\circ$ とする。

$\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とすると, $BD = \frac{\boxed{\text{ア}} \sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$

である。

点 A を通り点 D で辺 BC に接する円と辺 AB との交点で A と異なるものを E

とすると, $AB \cdot BE = \frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ であるから, $BE = \frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(数学 I ・ 数学 A 第 5 問は次ページに続く。)

次の には下の①～③から、 には③・④から当てはまるものを一つずつ選べ。

$\frac{BE}{BD}$ $\frac{AB}{BC}$ であるから、直線 AC と直線 DE の交点は辺 AC の端点

の側の延長上にある。

① < ② = ③ > ④ A ⑤ C

その交点を F とすると、 $\frac{CF}{AF} = \frac{\text{シ}}{\text{ス}}$ であるから、 $CF = \frac{\text{セ}}{\text{ソ}}$ であ

る。したがって、BF の長さが求まり、 $\frac{CF}{AC} = \frac{BF}{AB}$ であることがわかる。

次の には下の①～③から当てはまるものを一つ選べ。

点 D は△ABF の 。

- ① 外心である ② 内心である ③ 重心である
 ④ 外心、内心、重心のいずれでもない

第4問 (選択問題) (配点 20)

a を $0 < a < 1$ を満たす定数とする。三角形 ABC を考え、辺 AB を $1 : 3$ に内分する点を D 、辺 BC を $a : (1 - a)$ に内分する点を E 、直線 AE と直線 CD の交点を F とする。 $\vec{FA} = \vec{p}$ 、 $\vec{FB} = \vec{q}$ 、 $\vec{FC} = \vec{r}$ とおく。

(1) $\vec{AB} = \boxed{\text{ア}}$ であり

$$|\vec{AB}|^2 = |\vec{p}|^2 - \boxed{\text{イ}} \vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

である。ただし、 $\boxed{\text{ア}}$ については、当てはまるものを、次の①～③のうちから一つ選べ。

- ① $\vec{p} + \vec{q}$ ② $\vec{p} - \vec{q}$ ③ $\vec{q} - \vec{p}$ ④ $-\vec{p} - \vec{q}$

(2) \vec{FD} を \vec{p} と \vec{q} を用いて表すと

$$\vec{FD} = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \vec{p} + \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \vec{q} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。)

(3) s, t をそれぞれ $\overrightarrow{FD} = s\vec{r}$, $\overrightarrow{FE} = t\vec{p}$ となる実数とする。 s と t を a を用いて表そう。

$\overrightarrow{FD} = s\vec{r}$ であるから, ②により

$$\vec{q} = \boxed{\text{キク}}\vec{p} + \boxed{\text{ケ}}s\vec{r} \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

である。また, $\overrightarrow{FE} = t\vec{p}$ であるから

$$\vec{q} = \frac{t}{\boxed{\text{コ}} - \boxed{\text{サ}}}\vec{p} - \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{コ}} - \boxed{\text{サ}}}\vec{r} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

である。③と④により

$$s = \frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}(\boxed{\text{コ}} - \boxed{\text{サ}})}, \quad t = \boxed{\text{タチ}}(\boxed{\text{コ}} - \boxed{\text{サ}})$$

である。

(4) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BE}|$ とする。 $|\vec{p}| = 1$ のとき, \vec{p} と \vec{q} の内積を a を用いて表そう。

①により

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 1 - \boxed{\text{イ}}\vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2$$

である。また

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BE}|^2 &= \boxed{\text{ツ}}(\boxed{\text{コ}} - \boxed{\text{サ}})^2 \\ &\quad + \boxed{\text{テ}}(\boxed{\text{コ}} - \boxed{\text{サ}})\vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2 \end{aligned}$$

である。したがって

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = \frac{\boxed{\text{トナ}} - \boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である。