

■ 放物線の接線

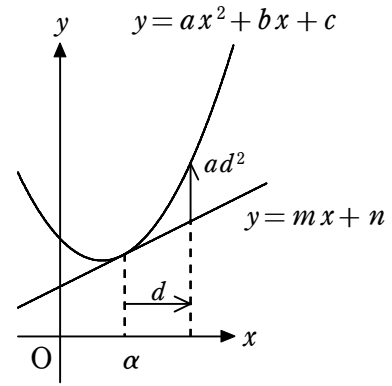
放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=mx+n$ が $x=\alpha$ である点で接しているとき、放物線と接線の差の関数は

$$(ax^2+bx+c)-(mx+n)=a(x-\alpha)^2$$

と表される。よって接点が与えられたとき、接線の方程式は

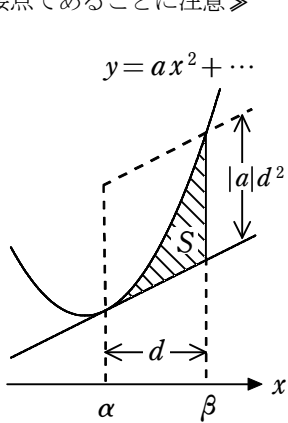
$$y=(ax^2+bx+c)-a(x-\alpha)^2$$

で求められる。



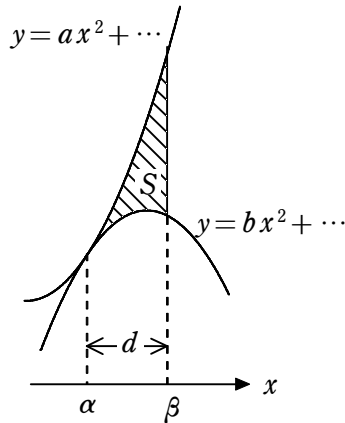
■ $\frac{1}{3}$ 公式

《接点であることに注意》



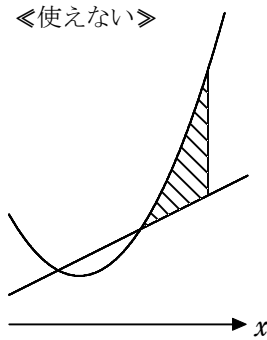
$$S = |a| \cdot \frac{1}{3} d^3$$

$$= |a| \cdot \frac{1}{3} (\beta - \alpha)^3$$



$$S = |a - b| \cdot \frac{1}{3} d^3$$

$$= |a - b| \cdot \frac{1}{3} (\beta - \alpha)^3$$



センター試験 数学ⅡB第2問[1] (2018/1/14) 一部解説

放物線 $C: y=px^2+qx+r$ ($p>0$) は直線 $\ell: y=2x-1$ と点 $A(1, 1)$ で接しているから

$$(px^2+qx+r)-(2x-1)=p(x-1)^2$$

$$px^2+qx+r=p(x^2-2x+1)+(2x-1)$$

よって $q=-2p+2, \quad r=p-1$

$$S = \int_1^v p(x-1)^2 dx = \left[\frac{p}{3}(x-1)^3 \right]_1^v = \frac{p}{3}(v-1)^3$$

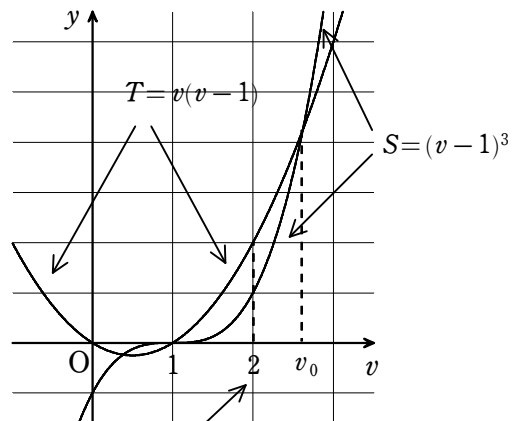
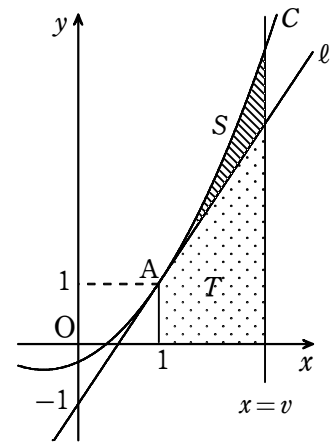
$$U = S - T = \frac{p}{3}(v-1)^3 - (v^2 - v) = f(v) \text{ とおくと}$$

$$f'(v) = p(v-1)^2 - (2v-1)$$

$f'(2)=0$ とすると $p=3$, このとき

$$U = S - T = (v-1)^3 - v(v-1) = (v-1)(v^2 - 3v + 1)$$

U は S と T の関数の差と考えるとよい。(右図)



$U = S - T$ はここで極小かつ最小

数学Ⅱ・数学B

第2問 (必答問題) (配点 30)

[1] $p > 0$ とする。座標平面上の放物線 $y = px^2 + qx + r$ を C とし、直線 $y = 2x - 1$ を l とする。 C は点 $A(1, 1)$ において l と接しているとする。

(1) q と r を、 p を用いて表そう。放物線 C 上の点 A における接線 l の傾きは $\boxed{\text{ア}}$ であることから、 $q = \boxed{\text{イウ}}p + \boxed{\text{エ}}$ がわかる。さらに、 C は点 A を通ることから、 $r = p - \boxed{\text{オ}}$ となる。

(2) $v > 1$ とする。放物線 C と直線 l および直線 $x = v$ で囲まれた図形の面積 S は $S = \frac{p}{\boxed{\text{カ}}}(v^3 - \boxed{\text{キ}}v^2 + \boxed{\text{ク}}v - \boxed{\text{ケ}})$ である。

また、 x 軸と l および 2 直線 $x = 1$, $x = v$ で囲まれた図形の面積 T は、 $T = v\boxed{\text{コ}} - v$ である。

$U = S - T$ は $v = 2$ で極値をとるとする。このとき、 $p = \boxed{\text{サ}}$ であり、 $v > 1$ の範囲で $U = 0$ となる v の値を v_0 とすると、

$v_0 = \frac{\boxed{\text{シ}} + \sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。 $1 < v < v_0$ の範囲で U は $\boxed{\text{ソ}}$ 。

$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを、次の①～④のうちから一つ選べ。

- ① つねに増加する ② つねに減少する ③ 正の値のみをとる
 ④ 負の値のみをとる ⑤ 正と負のどちらの値もとる

$p = \boxed{\text{サ}}$ のとき、 $v > 1$ における U の最小値は $\boxed{\text{タチ}}$ である。

(数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。)