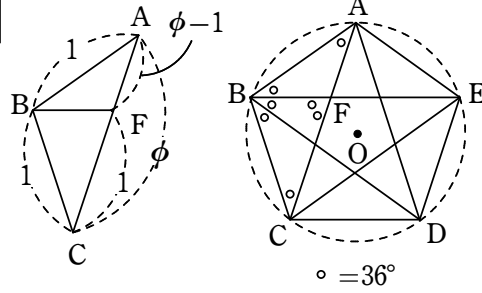


正五角形の面積（辺の長さは1）

正五角形の対角線の長さ $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180$

説明 1 辺の長さが 1 の正五角形の対角線の長さを ϕ とすると、 $\triangle ABC \sim \triangle AFB$ を用いて
 $1 : \phi = (\phi - 1) : 1$ から $\phi^2 - \phi - 1 = 0$
 $\phi > 0$ であるから $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

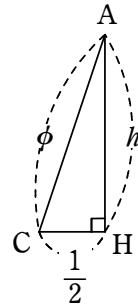


ϕ については $\frac{1}{\phi} = \phi - 1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\phi^2 = \phi + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $2\phi - 1 = \sqrt{5}$

正五角形の高さ $h = AH = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2} \approx 1.5388$

説明 A から CD に垂線を引き交点を H とすると、H は CD の中点であり

$h^2 = AH^2 = \phi^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5+2\sqrt{5}}{4}$ から $h = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$



正五角形の面積 $S = \frac{\sqrt{5}}{2} h = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \approx 1.7205$

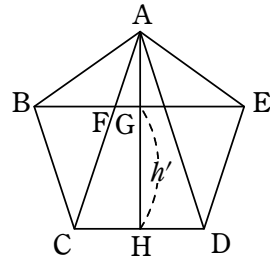
説明 AH と BE の交点を G とし、BE と CD の距離 GH を h' とする。

$GH : AH = FC : AC$ から $h' : h = 1 : \phi$

ゆえに $h' = \frac{h}{\phi} = (\phi - 1)h = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{2} \approx 0.9511$

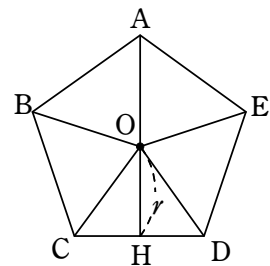
$S = \triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h' + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h'$

$= \frac{1}{2} \cdot 2(\phi - 1)h + \frac{1}{2} h = \frac{2\phi - 1}{2} \cdot h = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2} = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$

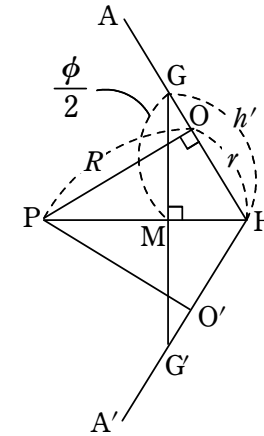
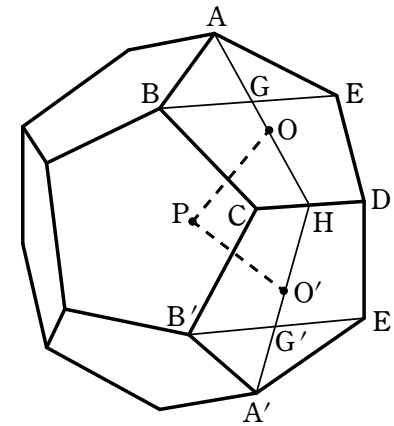


正五角形の内接円の半径 $r = OH = \frac{h}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10} \approx 0.6882$

説明 $S = 5 \times \triangle OCD = \frac{5}{2} r$ から $r = \frac{2}{5} S = \frac{h}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10}$



正十二面体の体積（辺の長さは1）



正十二面体の内接球の半径 $R = PO = \phi r = \frac{\sqrt{25+11\sqrt{5}}}{2\sqrt{10}} \approx 1.1135$

説明 正十二面体の（内接球および外接球の）中心を P とし、P から正五角形の面に垂線を引くと交点はその面の（内接円および外接円の）中心となる。図で四角形 $BB'E'E$ は 1 辺の長さが ϕ の正方形であるから $GG' = \phi$ である。GG' の中点を M とすると

$MH^2 = GH^2 - GM^2 = (h')^2 - \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 = \left(\frac{h}{\phi}\right)^2 - \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2\phi}\right)^2 - \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

ゆえに $MH = \frac{1}{2}$

$\triangle POH \sim \triangle GMH$ から $PO : GM = OH : MH$ すなわち $R : \frac{\phi}{2} = r : \frac{1}{2}$

$R = \phi r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10} = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{25+11\sqrt{5}}}{2\sqrt{10}}$

正十二面体の体積 $V = \frac{15+7\sqrt{5}}{4} \approx 7.6631$

説明 正十二面体の体積 V は、正五角錐 P-ABCDE の体積の 12 倍であるから

$V = 12 \times \frac{1}{3} SR = 4 \cdot \frac{5}{2} r \cdot \phi r = 10\phi r^2 = 10\phi \cdot \frac{h^2}{5} = 2\phi \left(\phi^2 - \frac{1}{4}\right)$

$= 2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{15+7\sqrt{5}}{4}$