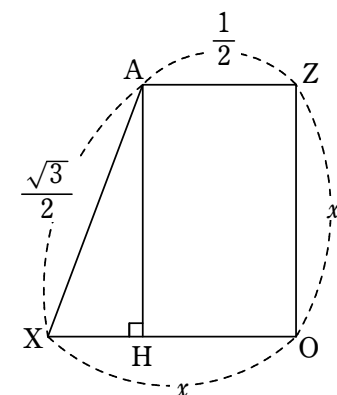
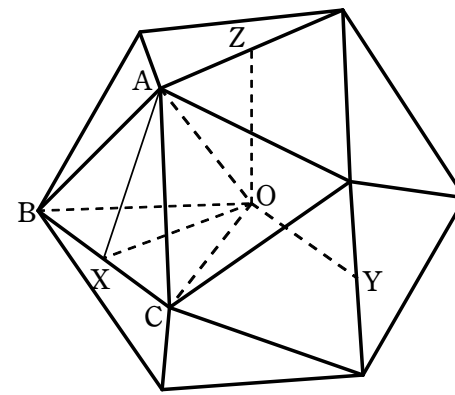
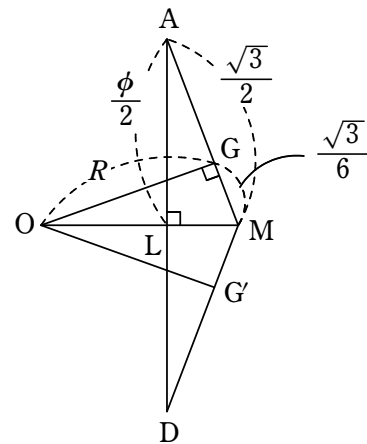
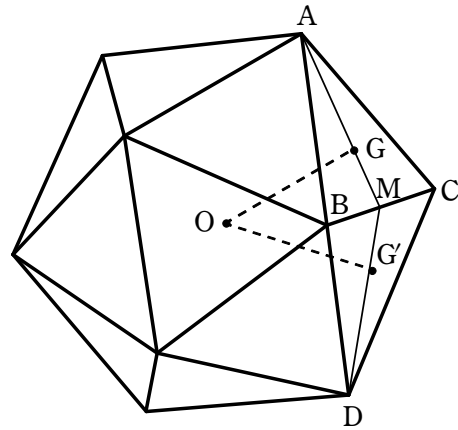


正二十面体の体積 (辺の長さは1)



辺の長さが1の正二十面体の体積  $V = \frac{5(3+\sqrt{5})}{12}$

説明 正二十面体の(内接球および外接球の)中心を  $O$  とする。 $O$  から正三角形の面に垂線を引くと、対称性から交点はその面の重心となる。隣り合う面を  $\triangle ABC$ ,  $\triangle DBC$  とし、重心をそれぞれ  $G$ ,  $G'$ , 辺  $BC$  の中点を  $M$ ,  $AD$  の中点を  $L$  とする。

辺の長さを1とすると

$$AM = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad GM = \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \text{また} \quad \triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$AD$  は辺の長さが1の正五角形の対角線であるから、その長さを  $\phi$  とすると

$$AD = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad AL = \frac{\phi}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

ここで

$$LM^2 = AM^2 - AL^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{8}, \quad LM = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

正二十面体の内接球の半径  $OG$  を  $R$  とすると、 $\triangle OGM \sim \triangle ALM$  を用いて

$$OG : AL = GM : LM \quad \text{すなわち} \quad R : \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{6} : \frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad \text{から}$$

$$R = \frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{1+\sqrt{5}}{4} \times \frac{4}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}$$

正三角錐  $O-ABC$  の体積  $v$  は

$$v = \frac{1}{3} \times \triangle ABC \times R = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12} = \frac{3+\sqrt{5}}{48}$$

したがって、正二十面体の体積は

$$V = 20v = 20 \times \frac{3+\sqrt{5}}{48} = \frac{5(3+\sqrt{5})}{12}$$

別説明 図で  $X, Y, Z$  は辺の中点で、対称性から  $OX, OY, OZ$  は互いに垂直に交わる。

$OX = OZ = x$  とおくと、四角形  $AXOZ$  は台形であり、 $A$  から  $OX$  に垂線  $AH$  を引くと

$$AH^2 + XH^2 = AX^2 \quad \text{すなわち} \quad x^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \quad \text{から}$$

$$4x^2 - 2x - 1 = 0, \quad x > 0 \quad \text{であるから} \quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

三角錐  $A-OBC$  の体積  $v$  は

$$\triangle OBC = \frac{1}{2} \times BC \times OX = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{8} \quad \text{から}$$

$$v = \frac{1}{3} \times \triangle OBC \times AH = \frac{1}{3} \times \frac{1+\sqrt{5}}{8} \times \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{48}$$

したがって、正二十面体の体積は

$$V = 20v = 20 \times \frac{3+\sqrt{5}}{48} = \frac{5(3+\sqrt{5})}{12}$$