

正十二角形の面積

辺の長さが 1 の正十二角形	
外接円の半径	$R = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$
面積	$S = 3R^2 = 6 + 3\sqrt{3}$

外接円の中心を O ，隣り合う辺を AB ， AC とする。
二等辺三角形 OAB の辺 OA ， OB 上にそれぞれ D ， E を
 $\angle OBD = \angle OAE = 30^\circ$

となるようにとり， BD と AE の交点を F とすると

$$FA = FB = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$FD = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}, \quad DA = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

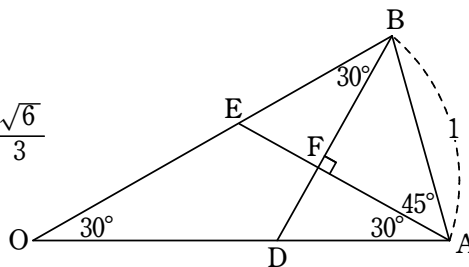
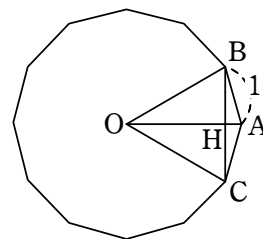
$$OD = DB = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{6}$$

ゆえに $R = OA = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$

$\triangle OBC$ は正三角形であり， OA と BC の交点を H とすると， $BH = \frac{1}{2}R$ より

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times OA \times BH = \frac{1}{4}R^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \right)^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

したがって $S = 12 \times \frac{1}{4}R^2 = 3R^2 = 6 + 3\sqrt{3}$



参考 図 1：正十二角形は 6 個の正方形と 12 個の正三角形に分割できるから，面積は

$$6 \times 1 + 12 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = 6 + 3\sqrt{3}$$

図 2：図のように，6 つに分割して並べ替えると PQ を一辺とする正方形になる。

$$\angle POQ = 120^\circ \text{ より } PQ = \sqrt{3}R$$

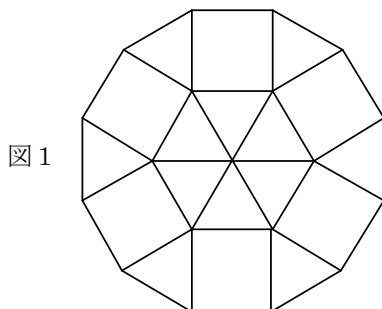


図 1

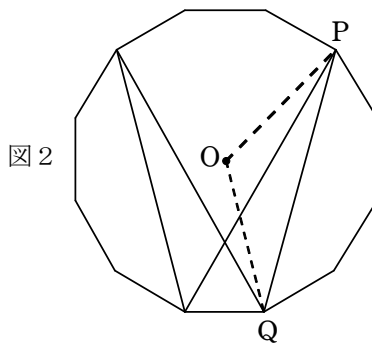


図 2