

ヘロンの公式

■ 例題 $\triangle ABC$ において、 $AB=6$, $BC=7$, $CA=5$ のとき、面積 S を求めよ。

解 頂点 A から辺 BC に垂線をひき、交点を H とする。

$AH=h$, $HC=x$ とおくと $BH=7-x$

$\triangle ABH$, $\triangle AHC$ において三平方の定理を用いると

$$(7-x)^2 + h^2 = 6^2 \quad \dots\dots ①$$

$$x^2 + h^2 = 5^2 \quad \dots\dots ②$$

② から $h^2 = 5^2 - x^2 \quad \dots\dots ②'$ これを ① に代入すると

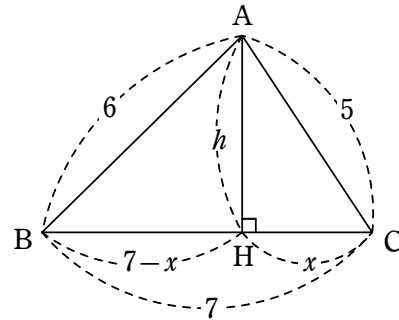
$$(7-x)^2 + 5^2 - x^2 = 6^2$$

$$49 - 14x + x^2 + 25 - x^2 = 36$$

$$-14x = -38 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{19}{7}$$

$$②' \text{ から } h^2 = 5^2 - \left(\frac{19}{7}\right)^2 = \left(5 + \frac{19}{7}\right)\left(5 - \frac{19}{7}\right) = \frac{54}{7} \times \frac{16}{7} \quad \text{よって} \quad h = \frac{12\sqrt{6}}{7}$$

$$\text{したがって} \quad S = \frac{1}{2} \times 7 \times h = 6\sqrt{6}$$



■ ヘロンの公式

三角形の3辺の長さを a , b , c とするとき、面積 S は

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{ただし} \quad s = \frac{a+b+c}{2} \quad (\text{周の長さの} \frac{1}{2})$$

この公式を用いると、上の例題については

$$s = \frac{5+6+7}{2} = 9 \quad \text{より} \quad S = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} = \sqrt{9 \times 4 \times 3 \times 2} = 6\sqrt{6}$$

■ 証明1 $\triangle ABC$ において、最大の辺を BC としておく。

頂点 A から辺 BC に垂線をひいて交点を H とし、 $BC=a$,

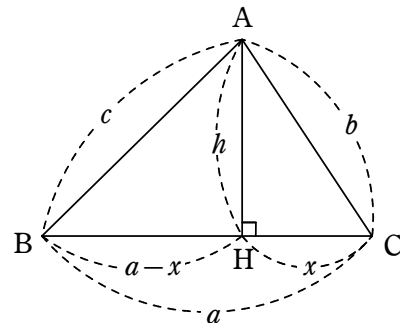
$CA=b$, $AB=c$, $AH=h$, $HC=x$ とする。

$\triangle ABH$, $\triangle AHC$ において三平方の定理を用いると

$$(a-x)^2 + h^2 = c^2 \quad \dots ① \quad x^2 + h^2 = b^2 \quad \dots ②$$

② から $h^2 = b^2 - x^2 \quad \dots\dots ②'$ これを ① に代入すると

$$(a-x)^2 + b^2 - x^2 = c^2 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$



②' から

$$\begin{aligned} h^2 &= b^2 - x^2 = (b+x)(b-x) \\ &= \left(b + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right) \left(b - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right) = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}{2a} \cdot \frac{-a^2 + 2ab - b^2 + c^2}{2a} \\ &= \frac{(a+b)^2 - c^2}{2a} \cdot \frac{-(a-b)^2 + c^2}{2a} = \frac{\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}\{(a-b)+c\}\{-(a-b)+c\}}{4a^2} \\ &= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4a^2} \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2}ah \text{ から } S^2 = \frac{1}{4}a^2h^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{16}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2} \text{ とおくと } \frac{-a+b+c}{2} = s-a, \quad \frac{a-b+c}{2} = s-b, \quad \frac{a+b-c}{2} = s-c \quad \text{であるから}$$

$$S^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \quad \text{ゆえに} \quad S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (\text{証明終})$$

■ 証明2 $\triangle ABC$ において、 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ とする。 $\triangle ABC$ の内接円 I と辺 BC , CA , AB との接点をそれぞれ D , E , F とし、 $AE=AF=x$, $BF=BL=y$, $CL=CE=z$ とすると

$$y+z=a, \quad z+x=b, \quad x+y=c$$

$$x+y+z = \frac{a+b+c}{2} = s \text{ を利用して解くと}$$

$$x=s-a, \quad y=s-b, \quad z=s-c$$

$$\text{すなわち } AF=s-a, \quad BF=s-b$$

傍接円 J と辺 BC , 直線 CA , AB との接点をそれぞれ

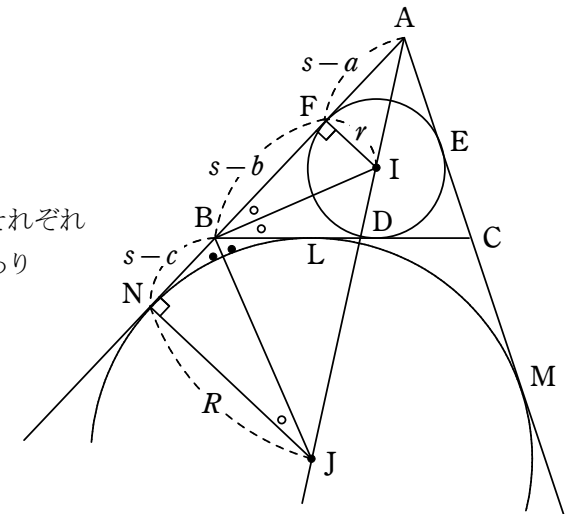
L , M , N とすると、 $BN=BL$, $CM=CL$ であり

$$AN=AM \text{ から } BN+c=CM+b$$

$$BL+CL=BC \text{ から } BN+CM=a$$

CM を消去すると、 $2BN=a+b-c$ から

$$BN=s-c \text{ また } AN=s$$



内接円の半径を r , 外接円の半径を R とすると

$$\triangle AFI \sim \triangle ANJ \text{ であるから } r : R = (s-a) : s \text{ から } rs = R(s-a) \quad \dots ①$$

$$\triangle BIF \sim \triangle JBN \text{ であるから } r : (s-c) = (s-b) : R \text{ から } rR = (s-b)(s-c) \quad \dots ②$$

$$①, ② \text{ の辺どうしをかけて } r^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$$

$$\text{したがって} \quad S = sr = s \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (\text{証明終})$$