

7, 11, 13 の倍数の見分け方 —— 文字式の応用 ——

■ 桁数を下げていく方法

正の整数  $N$  が  $p$  の倍数かどうかを見分けるために、同じ倍数をもつ  $N$  より桁数の小さな数を順次計算していく。 $N=10A+B$  とし、 $B$  を  $N$  の 1 の位の数とすると

$$N=10A+B=10(A-qB)+(10q+1)B$$

と変形できる。 $10q+1$  が  $p$  の倍数となるように、整数  $q$  を適当にとると ( $p$  と 10 は互いに素)

$$10q+1 \text{ が } p \text{ の倍数のとき}$$

$$N=10A+B \text{ は } p \text{ の倍数} \Leftrightarrow |A-qB| \text{ は } p \text{ の倍数}$$

が成り立つ。

例1 7 の倍数の見分け方

$$N=10A+B=10(A-2B)+21B$$

より

$$N=10A+B \text{ は } 7 \text{ の倍数} \Leftrightarrow |A-2B| \text{ は } 7 \text{ の倍数}$$

この関係を用いて、右のように繰り返し縦書きで計算して、

86422 が 7 の倍数であることがわかる。

$$\begin{array}{r} 86422 \quad \leftarrow 10A+B \\ -) \quad 4 \overline{)4} \\ \hline 8638 \quad \leftarrow A-2B \\ -) \quad 16 \overline{)16} \\ \hline 847 \\ -) \quad 14 \overline{)14} \\ \hline 70 \end{array}$$

例2 11, 13 の倍数の見分け方

$$N=10(A-B)+11B$$

$$N \text{ は } 11 \text{ の倍数} \Leftrightarrow |A-B| \text{ は } 11 \text{ の倍数}$$

$$\begin{array}{r} 84194 \\ -) \quad 4 \\ \hline 8415 \\ -) \quad 5 \\ \hline 836 \\ -) \quad 6 \\ \hline 77 \end{array}$$

84194 は 11 の倍数

$$N=10(A+4B)-39B$$

$$N \text{ は } 13 \text{ の倍数} \Leftrightarrow A+4B \text{ は } 13 \text{ の倍数}$$

$$\begin{array}{r} 85059 \\ +) \quad 36 \\ \hline 8541 \\ +) \quad 4 \\ \hline 858 \\ +) \quad 32 \\ \hline 117 \\ +) \quad 28 \\ \hline 39 \end{array}$$

85059 は 13 の倍数

その他には

$$N=10(A-5B)+51B, \quad N=10(A+2B)-19B$$

より

$$N \text{ は } 17 \text{ の倍数} \Leftrightarrow |A-5B| \text{ は } 17 \text{ の倍数}$$

$$N \text{ は } 19 \text{ の倍数} \Leftrightarrow A+2B \text{ は } 19 \text{ の倍数}$$

なども考えられる。

■  $1001=7 \times 11 \times 13$  を利用する方法

4 桁以上の正の整数  $N$  は、3 桁以下の整数に直して  $p$  ( $=7, 11, 13$ ) の倍数かどうかを見分けることができる。 $N=1000A+B$  とし、 $B$  を  $N$  の下 3 桁の整数部分とすると

$$N=1001A-(A-B)$$

であるから、以下が成り立つ。 $\boxed{1}$  と組み合わせて用いると効率が良い。

$$N=1000A+B \text{ は } p \text{ の倍数} \Leftrightarrow |A-B| \text{ は } p \text{ の倍数}$$

$p$  で割った余りまで正しく出そうとすると、計算は面倒になる。

$$N=1001A+(-A+B)=1001(A-1)+(-A+B+1001)$$

$$N=1000A+B \text{ を } p \text{ で割った余り} \Leftrightarrow -A+B \text{ または } -A+B+1001 \text{ を } p \text{ で割った余り}$$

ただし、たとえば  $-16$  を 7 で割った余りは、 $-2$  ではなく  $-16=7 \times (-3)+5$  のように、正の数 5 とする。

例3 左の計算 (倍数の見分けのみ)

$$\begin{array}{r} 123456|788 \\ -) \quad 788 \\ \hline 546=7 \times 13 \times 6 \\ 546 \text{ は } 7, 13 \text{ の倍数だから} \\ 123456788 \text{ も } 7, 13 \text{ の倍数} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 123456|789 \\ \hline 789 \\ -) -122|667 \\ \hline -667 \\ \hline -545 \\ +) 1001 \\ \hline 456 \end{array}$$

例4 右の計算 (余りまで求める)

$$456=7 \times 65+1=11 \times 41+5=13 \times 35+1$$

だから 123456789 を 7, 11, 13 で割った

余りは 1, 5, 1

3 桁になったところで負ならば 1001 を加える