

正七角形の性質

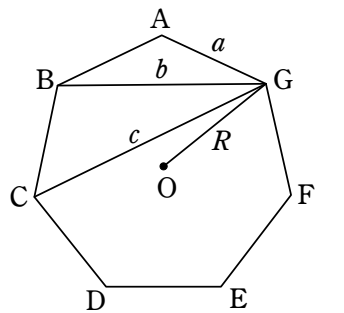
辺・対角線の長さ, 外接円の半径の関係

正七角形 ABCDEFG において, $GA=a$, $GB=b$,
 $GC=c$ とし, 外接円の半径を R とするとき

$$(1) \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (2) \frac{b}{a} - \frac{c}{b} + \frac{a}{c} = 1$$

$$(3) \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} = 5 \quad (4) a^2 + b^2 + c^2 = 7R^2$$

が成り立つ。



(1) について 証明 1

正七角形 ABCDEFG は円に内接する。

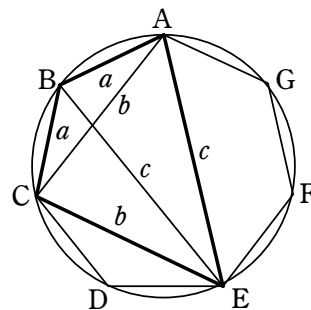
四角形 ABCE において, トレミーの定理を用いると

$$AC \cdot BE = BC \cdot EA + AB \cdot CE$$

すなわち $bc = ac + ab$, 両辺を abc で割ると

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

(証明終)



証明 2

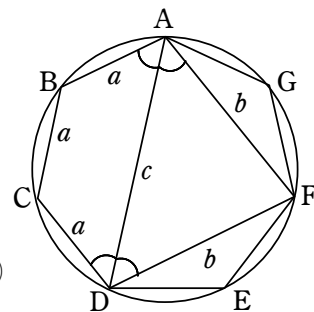
$$\angle BAD = \angle CDA = \angle FAD = \angle FDA = \frac{2\pi}{7} = \phi$$

等脚台形 ABCD について $a + 2a \cos \phi = c$

二等辺三角形 FAD について $2b \cos \phi = c$

2式から $\cos \phi$ を消去すると

$$a + 2a \cdot \frac{c}{2b} = c \quad \text{両辺を } ac \text{ で割って } \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (\text{証明終})$$



証明 3

辺 AB と CD の延長の交点を H とする。

$\triangle AHC$ は二等辺三角形であり $AH = AC = b$

$\triangle HCB$ は二等辺三角形であり

$$HC = HB = AH - AB = b - a$$

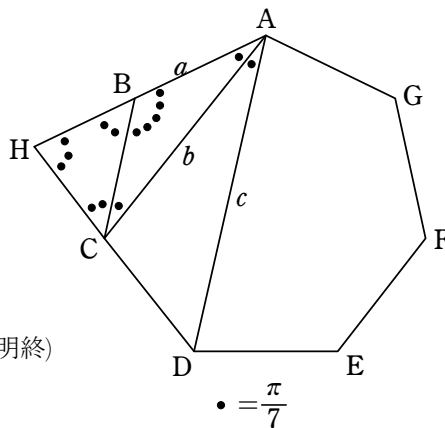
$\triangle AHD$ において AC は $\angle HAD$ の二等分線だから

$$AH : AD = HC : CD$$

すなわち $b : c = (b - a) : a$ から $(b - a)c = ab$

$$bc = ac + ab \quad \text{よって} \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

(証明終)



証明4

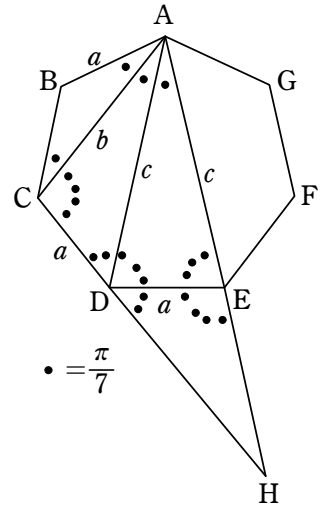
AE と CD を延長して交点を H とする。△HED と △ACD は 1 辺と両端の角がそれぞれ等しいから △HED ≡ △ACD

$$\text{よって } \angle EHD = \angle CAD = \frac{\pi}{7}, \quad EH = CA = b$$

△ABC と △ADH は 2 組の角が等しいから △ABC ∽ △ADH

$$AB : AD = AC : AH \quad \text{すなわち } a : c = b : (c + b)$$

$$bc = a(c + b) \quad \text{よって } \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (\text{証明終})$$



証明5

$\frac{\pi}{7} = \theta$ とおく。正弦定理により

$$\frac{a}{2R} = \sin \theta, \quad \frac{b}{2R} = \sin 2\theta, \quad \frac{c}{2R} = \sin 3\theta$$

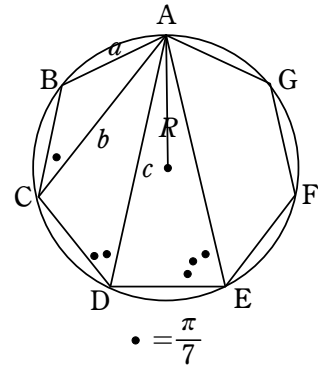
三角関数の積→差の公式

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \}$$

を用いると

$$\begin{aligned} & \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} - \frac{a}{2R} \cdot \frac{c}{2R} - \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R} \\ &= \sin 2\theta \sin 3\theta - \sin \theta \sin 3\theta - \sin \theta \sin 2\theta \\ &= \frac{1}{2}(\cos \theta - \cos 5\theta) - \frac{1}{2}(\cos 2\theta - \cos 4\theta) - \frac{1}{2}(\cos \theta - \cos 3\theta) \\ &= \frac{1}{2}(\cos 3\theta + \cos 4\theta - \cos 2\theta - \cos 5\theta) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{したがって } bc = ac + ab \quad \text{から } \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (\text{証明終})$$



(2) について 証明

$$\frac{\pi}{7} = \theta \quad \text{とおくと } \frac{a}{2R} = \sin \theta, \quad \frac{b}{2R} = \sin 2\theta, \quad \frac{c}{2R} = \sin 3\theta$$

注1の(*)を用いると

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} - \frac{c}{b} + \frac{a}{c} &= \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} - \frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta} + \frac{\sin \theta}{\sin 3\theta} = \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} - \frac{\sin 4\theta}{\sin 2\theta} + \frac{\sin 6\theta}{\sin 3\theta} \\ &= 2\cos \theta - 2\cos 2\theta + 2\cos 3\theta = 2(\cos \theta + \cos 5\theta + \cos 3\theta) = 1 \end{aligned}$$

(証明終)

(3) について 証明 1

$$\frac{\pi}{7} = \theta \text{ とおくと } \frac{a}{2R} = \sin \theta, \quad \frac{b}{2R} = \sin 2\theta, \quad \frac{c}{2R} = \sin 3\theta$$

注 1 の (*) を用いると

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} &= \left(\frac{\sin 2\theta}{\sin \theta}\right)^2 + \left(\frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta}\right)^2 + \left(\frac{\sin \theta}{\sin 3\theta}\right)^2 = \left(\frac{\sin 2\theta}{\sin \theta}\right)^2 + \left(\frac{\sin 4\theta}{\sin 2\theta}\right)^2 + \left(\frac{\sin 6\theta}{\sin 3\theta}\right)^2 \\ &= (2\cos \theta)^2 + (2\cos 2\theta)^2 + (2\cos 3\theta)^2 = 2(1 + \cos 2\theta) + 2(1 + \cos 4\theta) + 2(1 + \cos 6\theta) \\ &= 6 - 2(\cos 5\theta + \cos 3\theta + \cos \theta) = 6 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 5 \end{aligned} \quad (\text{証明終})$$

証明 2

四角形 ABCD, ABCE において, それぞれ

トレミーの定理を用いると

$$b^2 = a^2 + ac, \quad bc = ab + ac$$

$$\frac{b}{a} = x, \quad \frac{c}{a} = y \text{ とおくと}$$

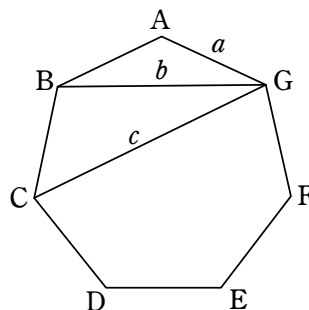
$$x^2 = 1 + y \quad \dots\dots \textcircled{1}, \quad xy = x + y \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } y = x^2 - 1 \quad \dots\dots \textcircled{3}, \quad y = \frac{x}{x-1} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ から } y \text{ を消去すると } x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

③, ④, ⑤ を用いると

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} &= x^2 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{1}{y^2} = x^2 + \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2} + \frac{(x-1)^2}{x^2} \\ &= \frac{2x^4 - x^2 - 2x + 2}{x^2} = \frac{(2x+2)(x^3 - x^2 - 2x + 1) + 5x^2}{x^2} = 5 \end{aligned} \quad (\text{証明終})$$



補足

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} = 6 \text{ が成り立つ。}$$

$$\textcircled{4} \text{ から } \frac{x}{y} = x - 1, \quad \textcircled{4}, \textcircled{5} \text{ から } y^2 = x(x+1)$$

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} &= \frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{y^2} + y^2 = \frac{1}{x^2} + (x-1)^2 + x(x+1) = \frac{2x^4 - x^3 + x^2 + 1}{x^2} \\ &= \frac{(2x+1)(x^3 - x^2 - 2x + 1) + 6x^2}{x^2} = 6 \end{aligned}$$

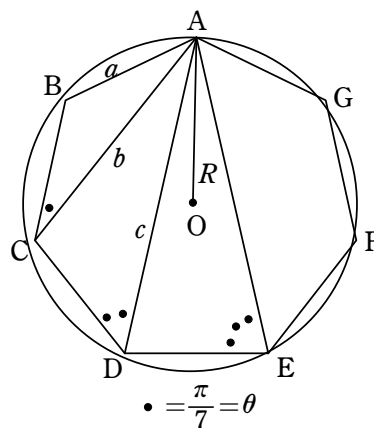
(4) について 証明

$\frac{\pi}{7} = \theta$ とおく。正弦定理により

$$\frac{a}{2R} = \sin \theta, \quad \frac{b}{2R} = \sin 2\theta, \quad \frac{c}{2R} = \sin 3\theta$$

注 1 の (*) を用いると

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2 \\ &= \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta \\ &= \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \frac{1 - \cos 4\theta}{2} + \frac{1 - \cos 6\theta}{2} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos 5\theta + \cos 3\theta + \cos \theta) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{4} \quad \text{したがって} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 7R^2 \quad (\text{証明終}) \end{aligned}$$



補足

一般に、正 $(2n+1)$ 角形 $A_1 A_2 A_3 \cdots A_{2n+1}$

において、

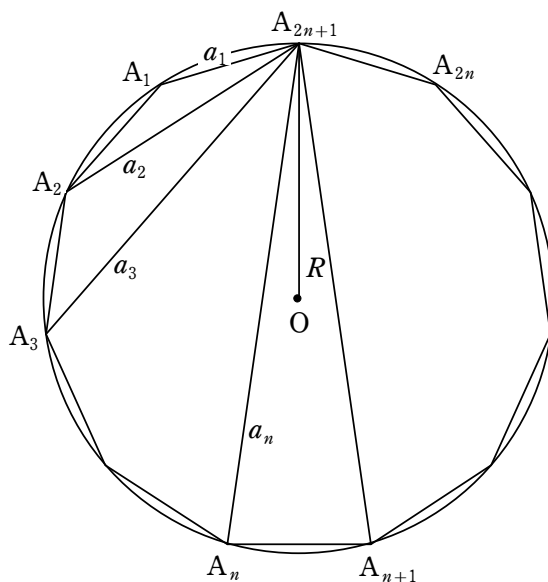
$$A_{2n+1} A_k = a_k \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

とし、外接円の半径を R とするとき

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = (2n+1)R^2$$

が成り立つ。

上の証明を一般化すればよい。

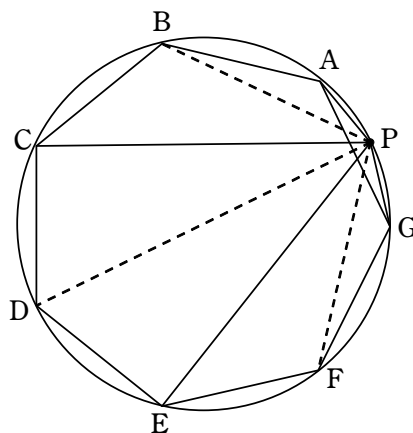


外接円上の点と頂点を結ぶ線分

正七角形 ABCDEFG の外接円の弧 GA 上に
点 P をとるとき

$$PA + PC + PE + PG = PB + PD + PF$$

が成り立つ。



証明 1

GA = a, GB = b, GC = c とおくととき

$$ab + ac = bc \quad \text{から} \quad \frac{b}{c} + 1 = \frac{b}{a} \quad \dots\dots ①$$

が成り立つ。以下ではトレミーの定理を用いる。

四角形 ABCP において

$$AB \cdot CP + BC \cdot PA = AC \cdot BP \quad \text{すなわち} \quad aPC + aPA = bPB \quad \dots\dots ②$$

四角形 EFGP において

$$EF \cdot GP + FG \cdot PE = EG \cdot FP \quad \text{すなわち} \quad aPG + aPE = bPF \quad \dots\dots ③$$

四角形 BDFP において

$$BD \cdot FP + DF \cdot PB = BF \cdot DP \quad \text{すなわち} \quad bPF + bPB = cPD \quad \dots\dots ④$$

④ と ① から

$$PB + PD + PF = \frac{b}{c}(PB + PF) + PB + PF = \left(\frac{b}{c} + 1\right)(PB + PF) = \frac{b}{a}(PB + PF)$$

②, ③ から $PA + PC = \frac{b}{a}PB$, $PE + PG = \frac{b}{a}PF$ したがって

$$PA + PC + PE + PG = \frac{b}{a}(PB + PF) = PB + PD + PF$$

証明 2

正七角形を $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ とし、その
外接円の中心を原点 O に、 OA_7 にそって x 軸
をとる。弧 GA 上に点 P をとるとき

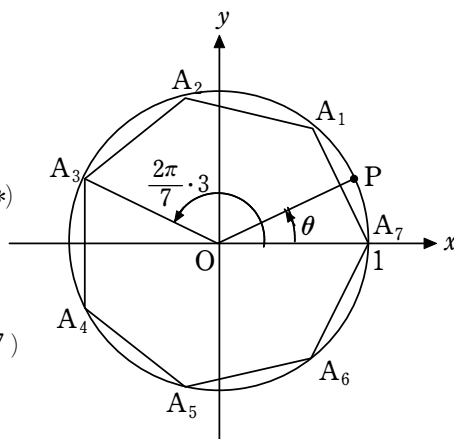
$$PA_1 + PA_3 + PA_5 + PA_7 = PA_2 + PA_4 + PA_6 \quad \dots(*)$$

が成り立つことを示す。

外接円の半径を 1 としても一般性は失われない。

A_k の座標を $\left(\cos \frac{2\pi}{7}k, \sin \frac{2\pi}{7}k\right)$ ($k=1, 2, \dots, 7$)

P の座標を $(\cos \theta, \sin \theta)$ ($0 < \theta < \frac{2\pi}{7}$) とする。



まず $\sum_{k=1}^7 \overrightarrow{OA_k} = \vec{0}$ が成り立つから、 y 成分をとると

$$\sum_{k=1}^7 \sin \frac{2\pi}{7} k = 0$$

また、正七角形を O の周りに角 α だけ回転したものについても同様だから

$$\sum_{k=1}^7 \sin \left(\frac{2\pi}{7} k + \alpha \right) = 0 \quad \text{また} \quad \sum_{k=0}^6 \sin \left(\frac{2\pi}{7} k + \alpha \right) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

が成り立つ。

\overrightarrow{OP} と $\overrightarrow{OA_k}$ のなす角を ϕ とするとき

$$0 < \phi \leq \pi \text{ ならば} \quad PA_k = 2 \sin \frac{\phi}{2}$$

$$\pi < \phi < 2\pi \text{ ならば} \quad PA_k = 2 \sin \frac{2\pi - \phi}{2} = 2 \sin \frac{\phi}{2}$$

いずれの場合も同一の式を用いてよい。

(*) の左辺の PA_{2k+1} ($k=0, 1, 2, 3$) について

$$PA_{2k+1} = 2 \sin \frac{1}{2} \left\{ \frac{2\pi}{7} (2k+1) - \theta \right\} = 2 \sin \left(\frac{2\pi}{7} k + \frac{\pi}{7} - \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\frac{\pi}{7} - \frac{\theta}{2} = \alpha \text{ とおくと} \quad PA_{2k+1} = 2 \sin \left(\frac{2\pi}{7} k + \alpha \right) \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

(*) の右辺の PA_{2k} ($k=1, 2, 3$) について

$$-\sin \frac{\phi}{2} = \sin \left(\pi + \frac{\phi}{2} \right) = \sin \frac{1}{2} (2\pi + \phi) \text{ を用いると}$$

$$\frac{1}{2} \left(2\pi + \frac{2\pi}{7} \cdot 2k - \theta \right) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2\pi}{7} \cdot (2k+7) - \theta \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2\pi}{7} \cdot 2(k+3) + \frac{2\pi}{7} - \theta \right\} = \frac{2\pi}{7} \cdot (k+3) + \alpha$$

$$\text{よって} \quad -PA_{2k} = -2 \sin \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{7} \cdot 2k - \theta \right) = 2 \sin \left\{ \frac{2\pi}{7} \cdot (k+3) + \alpha \right\}$$

すなわち

$$-PA_2 = 2 \sin \left(\frac{2\pi}{7} \cdot 4 + \alpha \right), \quad -PA_4 = 2 \sin \left(\frac{2\pi}{7} \cdot 5 + \alpha \right), \quad -PA_6 = 2 \sin \left(\frac{2\pi}{7} \cdot 6 + \alpha \right) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

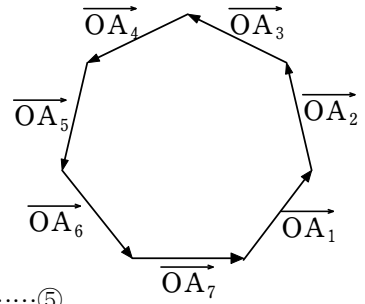
したがって ⑤, ⑥, ⑦ により

$$PA_1 + PA_3 + PA_5 + PA_7 - PA_2 - PA_4 - PA_6 = \sum_{k=0}^6 \sin \left(\frac{2\pi}{7} k + \alpha \right) = 0 \quad (\text{証明終})$$

補足 一般に、正 $(2n+1)$ 角形 $A_1 A_2 A_3 \cdots A_{2n+1}$ とその外接円の弧 $A_{2n+1} A_1$ 上の点 P について

$$\sum_{k=0}^n PA_{2k+1} = \sum_{k=1}^n PA_{2k}$$

の成り立つことが同様に証明できる。



注 1

$\frac{\pi}{7} = \theta$ とおくと $7\theta = \pi$ だから

$$\cos 5\theta = \cos(\pi - 2\theta) = -\cos 2\theta, \quad \sin 6\theta = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

などが成り立つ。

$$S = \cos 5\theta + \cos 3\theta + \cos \theta = -\cos 2\theta - \cos 4\theta - \cos 6\theta$$

とおき、三角関数の積→差の公式 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$ を用いると

$$\begin{aligned} S \sin \theta &= \cos 5\theta \sin \theta + \cos 3\theta \sin \theta + \cos \theta \sin \theta \\ &= \frac{1}{2}(\sin 6\theta - \sin 4\theta) + \frac{1}{2}(\sin 4\theta - \sin 2\theta) + \frac{1}{2}(\sin 2\theta - \sin 0) \\ &= \frac{1}{2} \sin 6\theta = \frac{1}{2} \sin \theta \end{aligned}$$

よって $S = \cos 5\theta + \cos 3\theta + \cos \theta = \frac{1}{2} \dots(*)$

また $\cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 6\theta = -\frac{1}{2}$

さらに $\cos 3\theta = \cos(\pi - 4\theta) \dots\dots(**)$ から $\cos 3\theta = -\cos 4\theta$ を用いると

$$4\cos^3 \theta - 3\cos \theta = -2(2\cos^2 \theta - 1)^2 + 1$$

$$8\cos^4 \theta + 4\cos^3 \theta - 8\cos^2 \theta - 3\cos \theta + 1 = 0$$

$$(\cos \theta + 1)(8\cos^3 \theta - 4\cos^2 \theta - 4\cos \theta + 1) = 0$$

$\cos \theta + 1 \neq 0$ だから $8\cos^3 \theta - 4\cos^2 \theta - 4\cos \theta + 1 = 0$

$x = 2\cos \theta$ とおくと

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \dots\dots(***)$$

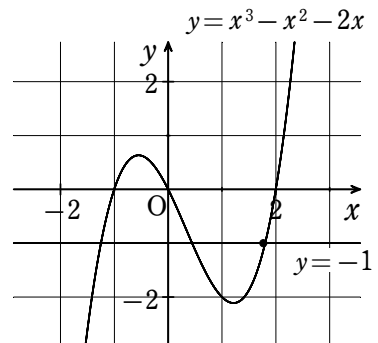
すなわち $2 \cos \frac{\pi}{7}$ は 3 次方程式 (***) の解であり

2 つのグラフ

$$y = x^3 - x^2 - 2x, \quad y = -1$$

の共有点の x 座標になる。

また $0 < \frac{\pi}{7} < \frac{\pi}{6}$ だから $\sqrt{3} < 2 \cos \frac{\pi}{7} < 2$ である。



$7\theta=3\pi$, $7\theta=5\pi$ のとき, それぞれ

$$\cos 3\theta = \cos(3\pi - 4\theta), \quad \cos 3\theta = \cos(5\pi - 4\theta)$$

であるから

$$\cos 3\theta = -\cos 4\theta$$

が成り立つ。したがって

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \dots\dots(***)$$

の異なる 3 つの解は $2\cos\frac{\pi}{7}$, $2\cos\frac{3\pi}{7}$, $2\cos\frac{5\pi}{7}$ すなわち $2\cos\theta$, $2\cos 3\theta$, $2\cos 5\theta$

である。解と係数の関係から

$$2\cos\theta + 2\cos 3\theta + 2\cos 5\theta = 1, \quad (2\cos\theta)(2\cos 3\theta)(2\cos 5\theta) = -1$$

が得られる。また

$$\frac{a}{2R} = \sin\theta, \quad \frac{b}{2R} = \sin 2\theta, \quad \frac{c}{2R} = \sin 3\theta$$

であるから,

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta, \quad \frac{c}{b} = \frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta} = \frac{\sin 4\theta}{\sin 2\theta} = 2\cos 2\theta = -2\cos 5\theta$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin\theta}{\sin 3\theta} = \frac{\sin 6\theta}{\sin 3\theta} = 2\cos 3\theta$$

すなわち $\frac{b}{a}$, $-\frac{c}{b}$, $\frac{a}{c}$ が 3 次方程式 (***) の 3 つの解になる。