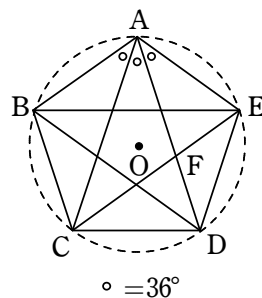


正五角形の関連事項

■ 正五角形の内角など

外接円 O とその円周角を考えるとよい。

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = 36^\circ, \quad \angle AFC = 180^\circ - 2 \times 36^\circ = 3 \times 36^\circ \quad \text{など}$$



■ 辺の長さが1の正五角形の対角線

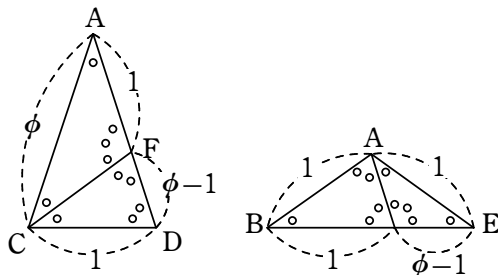
1 辺の長さが 1 の正五角形の対角線の長さを

ϕ とすると, $\triangle ACD \sim \triangle CDF$ を用いて

$$AC : CD = CD : DF \quad \dots (*) \quad \text{すなわち}$$

$$\phi : 1 = 1 : (\phi - 1) \quad \text{より} \quad \phi^2 - \phi - 1 = 0$$

$$\phi > 0 \quad \text{であるから} \quad \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$



(*) から $AD : AF = AF : FD$ すなわち点 F は線分 AD を黄金分割し, 比 $\frac{AD}{AF} = \frac{AF}{FD} = \phi$ は黄金比である。

■ $\sin(18^\circ \times k), \cos(18^\circ \times k) \quad (k=1, 2, 3, 4)$

$\sin 18^\circ$	$\cos 72^\circ$	$\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$	$\frac{1}{2\phi} = \frac{\phi - 1}{2}$	0.3090
$\sin 36^\circ$	$\cos 54^\circ$	$\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{\phi}} = \frac{\sqrt{3 - \phi}}{2}$	0.5878
$\sin 54^\circ$	$\cos 36^\circ$	$\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$	$\frac{\phi}{2}$	0.8090
$\sin 72^\circ$	$\cos 18^\circ$	$\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$	$\frac{\sqrt{\sqrt{5}\phi}}{2} = \frac{\sqrt{2 + \phi}}{2}$	0.9511

$$\text{ここで} \quad \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \doteq 1.6180, \quad \frac{1}{\phi} = \phi - 1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \doteq 0.6180, \quad \phi^2 = \phi + 1, \quad \phi^3 = 2\phi + 1$$

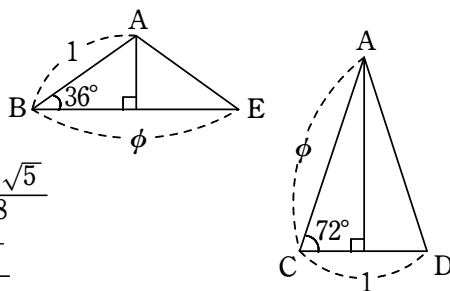
導出

$$\cos 72^\circ = \frac{1}{2\phi} = \frac{\phi - 1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 \right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\cos 36^\circ = \frac{\phi}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\sin^2 36^\circ = \frac{1 - \cos 72^\circ}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\phi - 1}{2} \right) = \frac{3 - \phi}{4} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$$

$$\cos^2 18^\circ = \frac{1 + \cos 36^\circ}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\phi}{2} \right) = \frac{2 + \phi}{4} = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$$

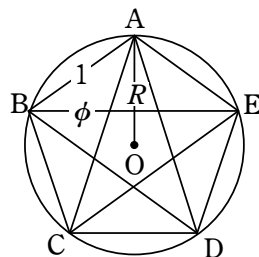


■ 辺の長さが1の正五角形

外接円の半径 $R = \frac{1}{2\sin 36^\circ} = \sqrt{\frac{\phi}{\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \approx 0.85065$

内接円の半径 $r = R \cos 36^\circ = \sqrt{\frac{\phi}{\sqrt{5}}} \cdot \frac{\phi}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\phi^3}{\sqrt{5}}}$
 $= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\phi + 1}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} \approx 0.6882$

面積 $S = 5 \times \frac{1}{2} r = \frac{5}{4} \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{4} \approx 1.7205$



■ 単位円に内接する正五角形

正五角形 ABCDE が図のように単位円に内接するとき

A (1, 0)

B $\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \right)$

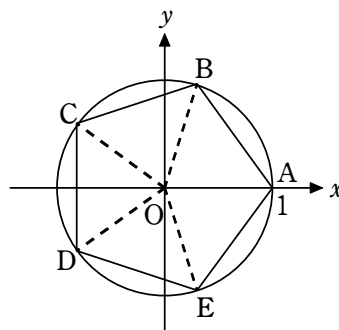
C $\left(-\frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \right)$

内接円の半径 $r = \cos\left(\frac{1}{2} \angle AOB\right) = \cos 36^\circ = \frac{\phi}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$

辺の長さ $AB = 2 \sin 36^\circ = \sqrt{3 - \phi} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}$

対角線の長さ $AC = 2 \sin 72^\circ = \sqrt{2 + \phi} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2}$

面積 $S = 5 \times \frac{1}{2} \sin 72^\circ = \frac{5\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{8}$



■ 正五角形のいろいろな性質

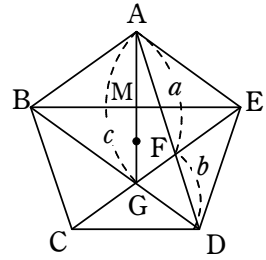
(1) $AF=a$, $FD=b$, $AG=c$ とするとき, $a^2+b^2=c^2$

証明1 $AD:AF=AF:FD$ より $(a+b):a=a:b$ すなわち

$$(a+b)b=a^2 \quad \text{よって} \quad ab=a^2-b^2$$

$$AM^2=AB^2+BM^2 \quad \text{より} \quad \left(\frac{c}{2}\right)^2=a^2-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad \text{これから}$$

$$c^2=4a^2-(a+b)^2=3a^2-2ab-b^2=3a^2-2(a^2-b^2)-b^2=a^2+b^2$$



補足 $a=1$, $b=\phi-1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のとき

$$c^2=1^2+(\phi-1)^2=\phi^2-2\phi+2=(\phi+1)-2\phi+2=3-\phi=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{よって} \quad c=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \quad (=2 \sin 36^\circ)$$

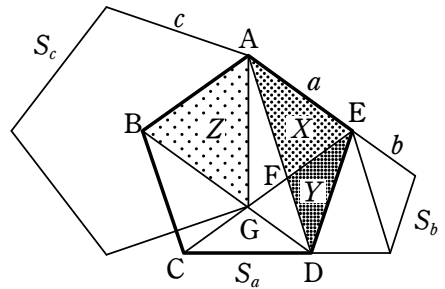
証明2 $AF=a$, $FD=b$, $AG=c$ をそれぞれ1辺とする正五角形を図のように作り, 面積をそれぞれ S_a , S_b , S_c とする。△EAF=X, △EFD=Y, △ABG=Z とおくと

□ABCF=2Z=2(X+Y) であり

$$S_a=2X+Y+2Z=4X+3Y, \quad S_b=X+2Y \quad \text{から}$$

$$S_c=5Z=5X+5Y=S_a+S_b$$

したがって $c^2=a^2+b^2$



証明3(略) △AFE ∽ △BAE から $AF:BA=AE:BE$

すなわち $a:b=b:(a+b)$ ……①

△BFR は二等辺三角形で $\angle BRF=\angle BFR=18^\circ$

RF は ∠BRA の二等分線だから

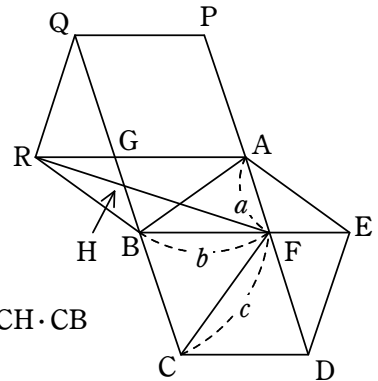
$$BH:HG=RB:RG=b:a$$

これと ① から $BH:BG=b:(a+b)=a:b$

$$\text{ゆえに} \quad BH=BG \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b}$$

△CFB ∽ △CHF から $CF:CH=CB:CF$ ゆえに $CF^2=CH \cdot CB$

$$\text{すなわち} \quad c^2=\left(\frac{a^2}{b}+b\right)b=a^2+b^2$$

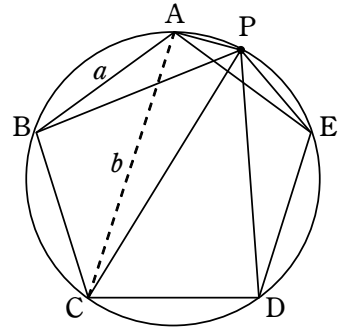


■ 正五角形とその外接円

正五角形 ABCDE の外接円の弧 EA 上に点 P をとると

$$PA + PC + PE = PB + PD$$

が成り立つ。



証明

正五角形の辺, 対角線の長さをそれぞれ a, b とする。

四角形 ABCD にトレミーの定理を用いると

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

$$\text{すなわち } a^2 + ab = b^2 \quad \dots\dots①$$

四角形 PABC において $PA \cdot BC + AB \cdot CP = PB \cdot AC$ すなわち

$$aPA + aPC = bPB \quad \text{よって } PA + PC = \frac{b}{a}PB \quad \dots\dots②$$

四角形 PCDE において $PC \cdot DE + CD \cdot EP = PD \cdot CE$ すなわち

$$aPC + aPE = bPD \quad \text{よって } PC + PE = \frac{b}{a}PD \quad \dots\dots③$$

四角形 PBCD において $PB \cdot CD + BC \cdot DP = PC \cdot BD$ すなわち

$$aPB + aPD = bPC \quad \text{よって } PC = \frac{a}{b}(PB + PD) \quad \dots\dots④$$

②+③-④として, ①を用いると

$$PA + PC + PE = \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right)(PB + PD) = \frac{b^2 - a^2}{ab}(PB + PD) = PB + PD$$

■ 正五角形とその外接円 (その2)

正五角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ の外接円の弧 A_5A_1 上に点 P をとると

$$PA_1 + PA_3 + PA_5 = PA_2 + PA_4 \quad \dots\dots (*)$$

が成り立つ。

証明

外接円の半径を 1 とし, 正五角形の頂点 $A_k (k=1, 2, \dots, 5)$

の座標を

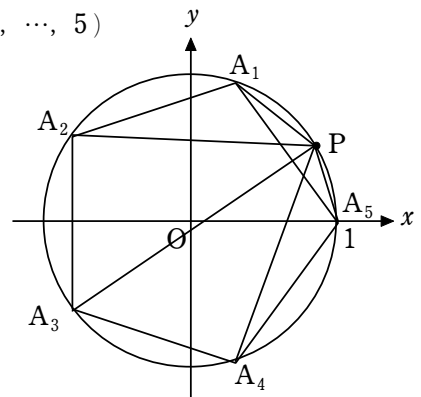
$$A_k \left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}k\right), \sin\left(\frac{2\pi}{5}k\right) \right)$$

とする。

まず, 対称性から $\sum_{k=1}^5 \vec{OA}_k = \vec{0}$ が成り立つから,

両辺の y 成分をとると

$$\sum_{k=1}^5 \sin\left(\frac{2\pi}{5}k\right) = 0$$



また、正五角形を O の周りに角 α だけ回転したものについても同様だから

$$\sum_{k=1}^5 \sin\left(\frac{2\pi}{5}k + \alpha\right) = 0 \quad \text{また} \quad \sum_{k=0}^4 \sin\left(\frac{2\pi}{5}k + \alpha\right) = 0 \quad \dots\dots ①$$

が成り立つ。

次に P の座標を $P(\cos\theta, \sin\theta)$ ($0 < \theta < \frac{2\pi}{5}$) とする。

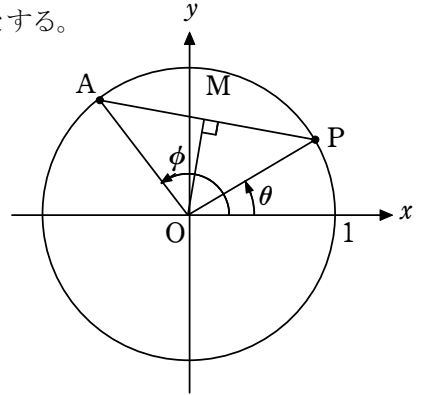
P を O の周りに角 $(\phi - \theta)$ だけ回転した点を A とすると

$$0 < \phi - \theta \leq \pi \text{ のときは } PA = 2 PM = 2 \sin \frac{1}{2}(\phi - \theta)$$

$\pi < \phi - \theta < 2\pi$ のときは

$$PA = 2 \sin \frac{1}{2}\{2\pi - (\phi - \theta)\} = 2 \sin \frac{1}{2}(\phi - \theta)$$

いずれも同一の式を用いてよい。



(*) の左辺の PA_{2k+1} ($k=0, 1, 2$) について

$$PA_{2k+1} = 2 \sin \frac{1}{2} \left\{ \frac{2\pi}{5}(2k+1) - \theta \right\} = 2 \sin \left(\frac{2\pi}{5}k + \frac{\pi}{5} - \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\frac{\pi}{5} - \frac{\theta}{2} = \alpha \text{ とおくと } PA_{2k+1} = 2 \sin \left(\frac{2\pi}{5}k + \alpha \right) \quad \dots\dots ②$$

(*) の右辺の PA_{2k} ($k=1, 2$) について

$$-\sin \frac{1}{2}(\phi - \theta) = \sin \left\{ \pi + \frac{1}{2}(\phi - \theta) \right\} = \sin \frac{1}{2}(2\pi + \phi - \theta) \text{ を用いる。}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(2\pi + \frac{2\pi}{5} \cdot 2k - \theta \right) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2\pi}{5} \cdot (2k+5) - \theta \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2\pi}{5} \cdot 2(k+2) + \frac{2\pi}{5} - \theta \right\} \\ &= \frac{2\pi}{5} \cdot (k+2) + \alpha \end{aligned}$$

$$-PA_{2k} = -2 \sin \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{5} \cdot 2k - \theta \right) = 2 \sin \left\{ \frac{2\pi}{5} \cdot (k+2) + \alpha \right\}$$

$$\text{すなわち } -PA_2 = 2 \sin \left(\frac{2\pi}{5} \cdot 3 + \alpha \right), \quad -PA_4 = 2 \sin \left(\frac{2\pi}{5} \cdot 4 + \alpha \right) \quad \dots\dots ③$$

したがって ②, ③, ① により

$$PA_1 + PA_3 + PA_5 - PA_2 - PA_4 = \sum_{k=0}^4 \sin \left(\frac{2\pi}{5}k + \alpha \right) = 0 \quad (\text{証明終})$$

補足 一般に正 $2n+1$ 角形 $A_1A_2A_3 \dots A_{2n+1}$ とその外接円の弧 $A_{2n+1}A_1$ 上の点 P について

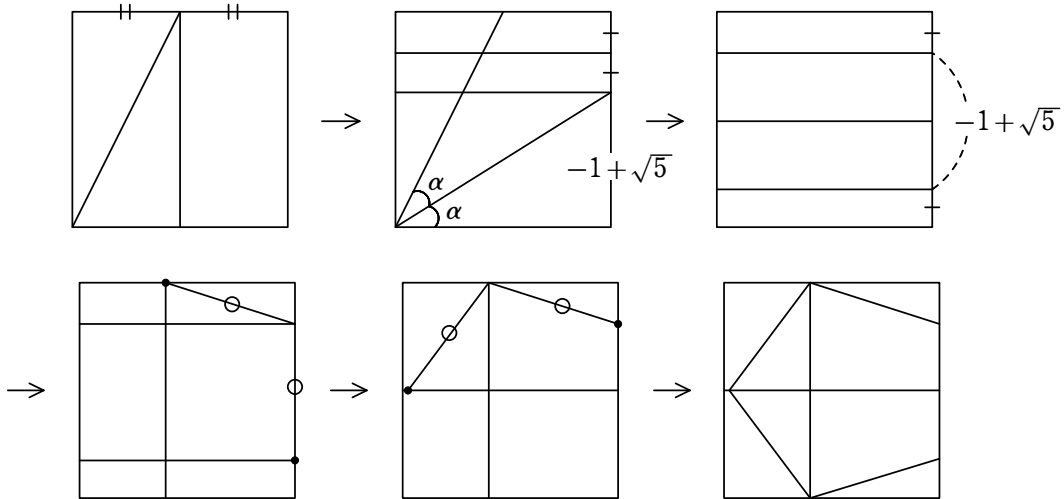
$$\sum_{k=0}^n PA_{2k+1} = \sum_{k=1}^n PA_{2k}$$

■ 折り紙で正五角形をつくる

正五角形の1辺の長さが1のとき対角線の長さは $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ だから、対角線の長さが2のとき

1辺の長さは $\frac{2}{\phi} = -1+\sqrt{5}$ である。折り紙の1辺の長さを2とする。

$\tan 2\alpha = 2$ のとき $2 \tan \alpha = -1+\sqrt{5}$ となる。



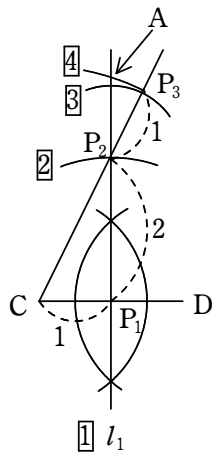
■ 正五角形の作図

(1) 1辺が与えられた場合

辺の長さが2のとき対角線の長さは

$$2\phi = 1 + \sqrt{5}$$

- ① CDの垂直二等分線 l_1 をひく
- ② l_1 上に $P_1P_2 = CD$ となる P_2 をとる
- ③ CP_2 上に $P_2P_3 = CP_1$ となる P_3 をとる
- ④ l_1 上に $CA = CP_3$ となる A をとる



(2) 外接円が与えられた場合

半径2の円に内接するとき辺の長さは

$$2\sqrt{3-\phi} = \sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

- ① OP_1 の中点 P_2 をとる
- ② OP_3 上に $P_2P_4 = P_2A$ となる P_4 をとる
- ③ 円周上に $AB = AP_4$ となる B をとる

