

第1問

[2]

(1)  $b=6, c=5, \cos A = \frac{3}{5}$  のとき,

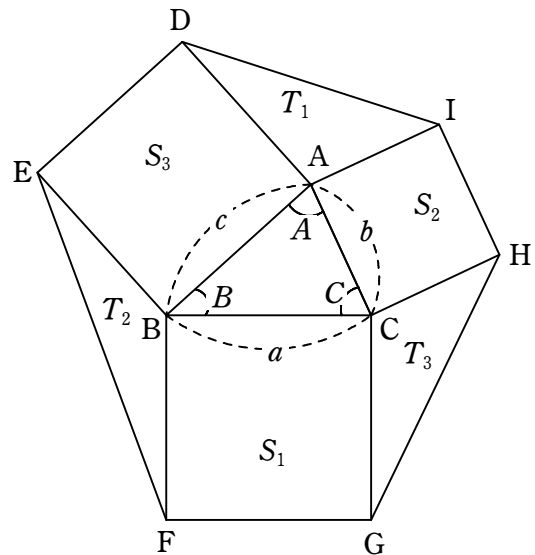
$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$\cos A > 0$  だから  $0^\circ < A < 90^\circ$  から  $\sin A > 0$

よって  $\sin A = \frac{\boxed{4}}{\boxed{5}}$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = \boxed{12}$$

$$\triangle AID = \frac{1}{2}bc\sin(180^\circ - A) = \boxed{12}$$



(注)  $\sin(180^\circ - A) = \sin A$  を用いた。これから  $\triangle AID = \triangle ABC$   
 同様に考えると  $\triangle BEF = \triangle ABC, \triangle CGH = \triangle ABC$  これは(3)でつかう。

(2)  $S_1 - S_2 - S_3 = a^2 - b^2 - c^2$  である。

- $0^\circ < A < 90^\circ$  のとき  $a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow S_1 - S_2 - S_3 < 0$  ②
- $A = 90^\circ$  のとき  $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow S_1 - S_2 - S_3 = 0$  ①
- $90^\circ < A < 180^\circ$  のとき  $a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow S_1 - S_2 - S_3 > 0$  ①

(3)  $a, b, c$  の値に関係なく  $\triangle AID = \triangle BEF = \triangle CGH$  すなわち  $T_1 = T_2 = T_3$  ③

(4)  $\triangle ABC, \triangle AID, \triangle BEF, \triangle CGH$  の外接円の半径をそれぞれ  $R, R_1, R_2, R_3$  とする。

$$2R_1 = \frac{ID}{\sin(180^\circ - A)}, \quad 2R = \frac{BC}{\sin A} \quad \text{であるから}$$

$0^\circ < A < 90^\circ$  のとき  $ID \boxed{>} BC$  から  $R_1 \boxed{>} R$  ②, ②

- $0^\circ < A < B < C < 90^\circ$  のとき  $R_1 > R, R_2 > R, R_3 > R$  よって  $R$  が最小。 ①
- $0^\circ < A < B < 90^\circ < C$  のとき  $R_1 > R, R_2 > R, R > R_3$  よって  $R_3$  が最小。 ③

(注) (3)の結果を考慮し  $A, B$  の大小と  $R_1, R_2$  の大小との関係など考えて迷路にはいり、時間を浪費してしまいました。 $R$  との大小を考えれば何でもなかったのですが。