

第5問

AB=3, BC=4, AC=5 から  $\triangle ABC$  は  $\angle B=90^\circ$ , 外接円の直径が AC でその中点が中心 O である。AD は  $\angle BAC$  を二等分するから

$$BD : DC = AB : AC = 3 : 5$$

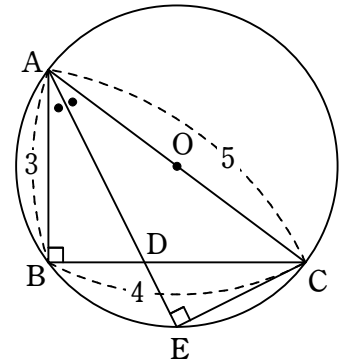
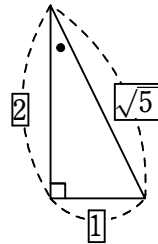
よって  $BD = 4 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{2}$  これから

$$AB : BD : AD = 2 : 1 : \sqrt{5}$$

よって  $AD = 3 \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

$\triangle AEC \sim \triangle ABD$  から  $AE : AC = 2 : \sqrt{5}$

$$AE = 5 \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$



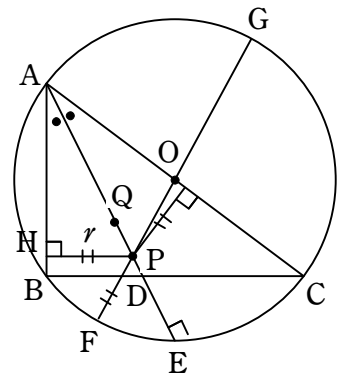
円 P は AB, AC に接するから二等分線 AE 上にある。また、円 P は外接円 O にも接するから F, P, O は一直線上にあり、FG は円 O の直径である。

$$AP = \sqrt{5}r, \quad PG = FG - FP = 5 - r$$

方べきの定理により

$$AP \cdot PE = FP \cdot PG \quad \text{すなわち} \quad \sqrt{5}r(2\sqrt{5} - \sqrt{5}r) = r(5 - r)$$

$r \neq 0$  より  $10 - 5r = 5 - r$  よって  $r = \frac{5}{4}$



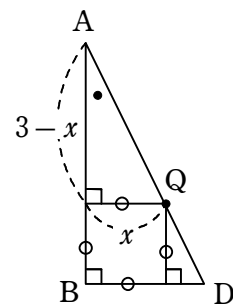
(注)  $PO = FO - FP = \frac{5}{2} - \frac{5}{4} = \frac{5}{4} = r$  となり、PO は P と AC

の距離に一致する、すなわち  $PO \perp AC$

$\triangle ABC$  の内接円の半径を  $x$  とすると

$$3 - x : x = 2 : 1 \quad \text{から} \quad x = 1, \quad AQ = \sqrt{5}$$

また  $AH : PH = AH : \frac{5}{4} = 2 : 1$  から  $AH = \frac{5}{2}$



$\triangle AHQ$  は  $AH : AQ = \frac{5}{2} : \sqrt{5} = \sqrt{5} : 2$  であるから  $\angle AQH = 90^\circ$  の直角三角形。

四角形 HBDQ は  $\angle HBD = \angle HQD = 90^\circ$  だから円に内接する。3点 H, B, Q を通る円は一通りに決まり、点 D はこの円上にあり、点 E はこの円上にない。 ㊶