

第5問

- (1) (注)  $\overrightarrow{B_1C_1}$  を  $\overrightarrow{OA_1}$ ,  $\overrightarrow{OA_2}$  を用いて2通りに表し  $a$  の値を求める  
問題にみえる。  $\overrightarrow{OA_1}=\vec{a}_1$ ,  $\overrightarrow{OA_2}=\vec{a}_2$ ,  $\overrightarrow{OA_3}=\vec{a}_3$  と書くことにする。

$$\angle A_1C_1B_1 = \boxed{36}^\circ, \angle C_1A_1A_2 = 36^\circ \text{ から } \overrightarrow{A_1A_2} \parallel \overrightarrow{B_1C_1}$$

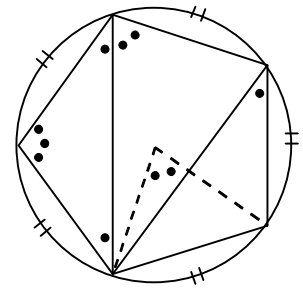
$$\text{ゆえに } \overrightarrow{A_1A_2} = \boxed{a} \overrightarrow{B_1C_1}$$

$$\overrightarrow{B_1C_1} = \frac{1}{a} \overrightarrow{A_1A_2} = \frac{1}{a} (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)$$

$$\begin{aligned} \text{また, } \overrightarrow{B_1C_1} &= \overrightarrow{B_1A_2} + \overrightarrow{A_2O} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1C_1} \\ &= -\vec{a}\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_1 + \vec{a}\vec{a}_2 = (\boxed{a} - \boxed{1}) (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \end{aligned}$$

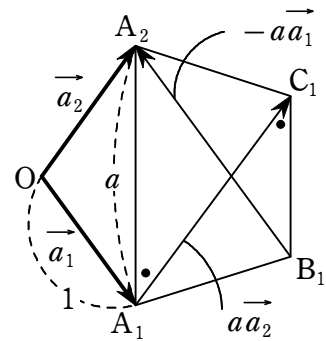
$$\text{したがって } \frac{1}{a} = a - 1 \text{ から } a^2 - a - 1 = 0$$

$$a > 0 \text{ に注意して解くと } a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$



$$1\text{つの弧の中心角} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

$$1\text{つの弧の円周角} = 36^\circ = \bullet$$



- (2) 面  $OA_1B_1C_1A_2$  について  $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2B_1} = \vec{a}_2 + \vec{a}\vec{a}_1$

$$|\vec{a}_2 - \vec{a}_1|^2 = |\overrightarrow{A_1A_2}|^2 = a^2 = a + 1 = \frac{\boxed{3}}{\boxed{2}} + \sqrt{\frac{\boxed{5}}{\boxed{2}}}$$

$$|\vec{a}_2 - \vec{a}_1|^2 = |\vec{a}_1|^2 - 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 + |\vec{a}_2|^2 \text{ から}$$

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \frac{1}{2} (|\vec{a}_1|^2 + |\vec{a}_2|^2 - |\vec{a}_2 - \vec{a}_1|^2)$$

$$= \frac{2 - a^2}{2} = \frac{1 - a}{2} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{4}} - \sqrt{\frac{\boxed{5}}{\boxed{4}}}$$

- 面  $OA_2B_2C_2A_3$  について  $\overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{A_3B_2} = \vec{a}_3 + \vec{a}\vec{a}_2$

$$\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 = \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} = \frac{1 - a}{2}$$

$$\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OB_2} = \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_3 + \vec{a}\vec{a}_2) = \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_1 + \vec{a}\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = (1 + a) \cdot \frac{1 - a}{2} = -\frac{a}{2} = -\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad \textcircled{9}$$

$$\overrightarrow{OB_1} \cdot \overrightarrow{OB_2} = (\vec{a}_2 + \vec{a}\vec{a}_1) \cdot (\vec{a}_3 + \vec{a}\vec{a}_2) = a|\vec{a}_2|^2 + (1 + a + a^2) \cdot \frac{1 - a}{2} = a + (1 + a)(1 - a) = 0 \quad \textcircled{10}$$

- 面  $A_2C_1DEB_2$  について  $\overrightarrow{B_2D} = a\overrightarrow{A_2C_1} = \overrightarrow{OB_1}$

$\overrightarrow{B_2D} \parallel \overrightarrow{OB_1}$  であるから4点  $O, B_1, D, B_2$  は同一平面上にある。

$$|\overrightarrow{B_2D}| = |\overrightarrow{OB_1}| = |\overrightarrow{OB_2}| = |\overrightarrow{B_1D}| = a \text{ さらに } \overrightarrow{OB_1} \perp \overrightarrow{OB_2}$$

四角形  $OB_1DB_2$  は4辺の長さが等しく, 1つの角が直角であるから, 正方形である。  $\textcircled{11}$

