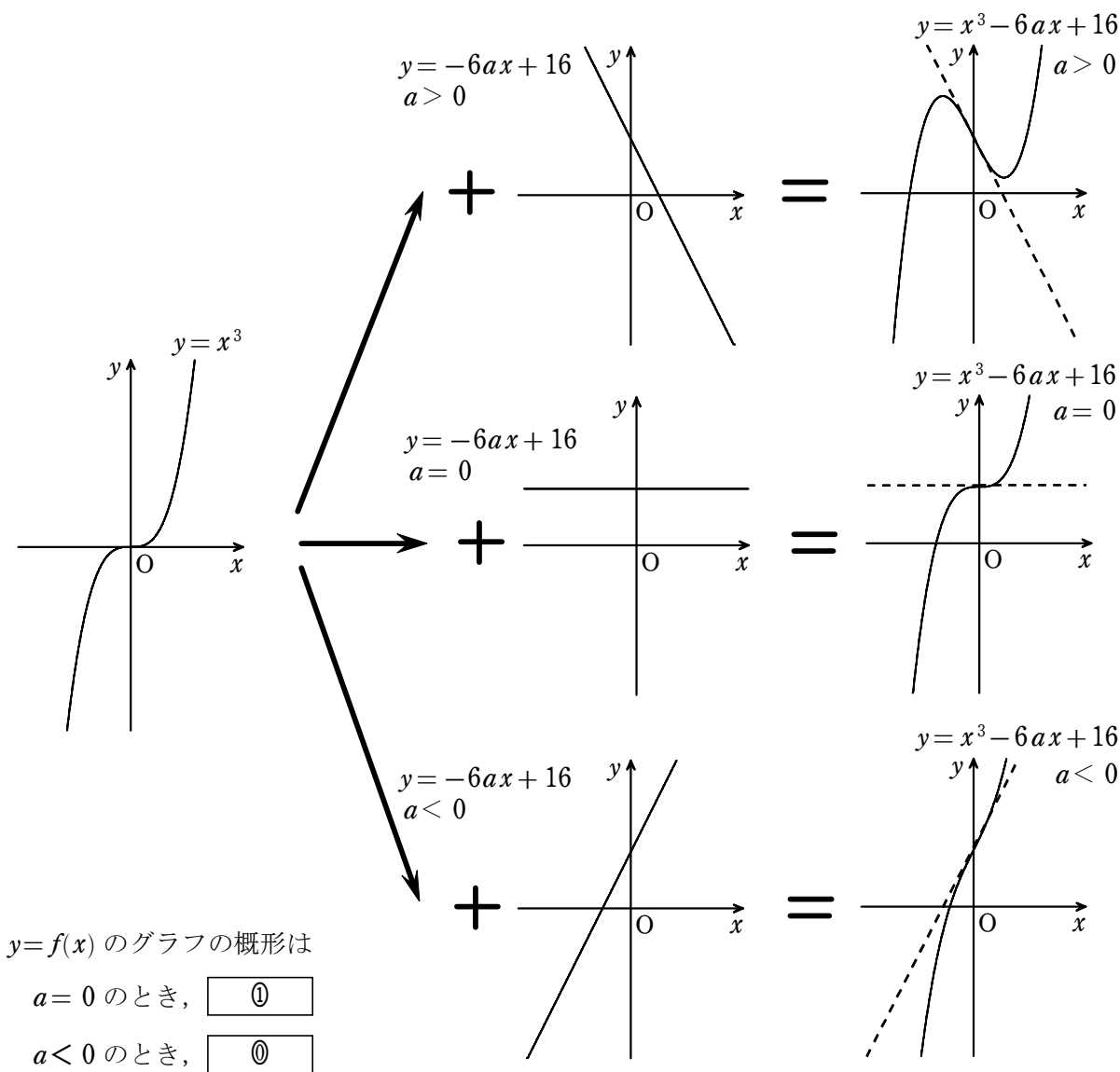


第2問

[1] $f(x) = x^3 - 6ax + 16$

(1) $y = f(x)$ のグラフの概形では、関数の和の考えを用いるとよい。



(2) $a > 0$ のとき, $y = f(x)$ のグラフの概形は右図。

直線 $y = p$ と 3 個の共有点をもつのは

極小値 $< p <$ 極大値

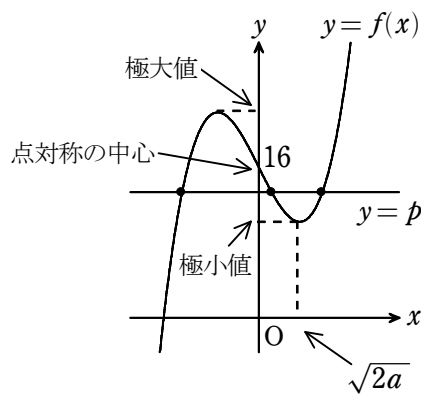
$f(x) = x^3 - 6ax + 16$ から

$f'(x) = 3x^2 - 6a = 3(x^2 - 2a) = 3(x + \sqrt{2a})(x - \sqrt{2a})$

極小値は $f(\sqrt{2a}) = 2a\sqrt{2a} - 6a\sqrt{2a} + 16 = -4\sqrt{2} a^{\frac{3}{2}} + 16$

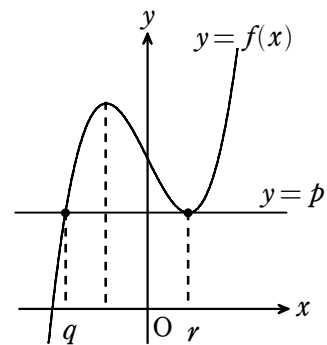
極大値は $f(-\sqrt{2a}) = 4\sqrt{2} a^{\frac{3}{2}} + 16$

すなわち $< p <$

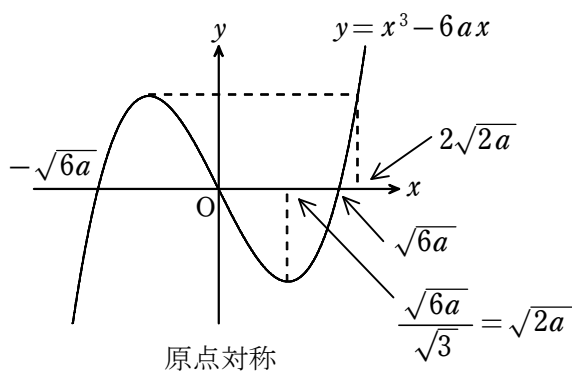


$p = \boxed{\text{㉓}}$ のとき、右図のようになる。

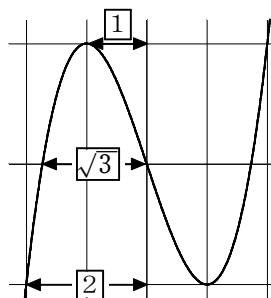
$$q = -2r = \boxed{-2} \sqrt{\boxed{2}} a^{\frac{1}{2}}, \quad r = \sqrt{\boxed{2}} a^{\frac{1}{2}}$$



(注) 極値をもつ3次関数は下の右図のような概形になることを利用すると $q = -2r$ であることがわかる。



x^3 の係数 > 0 のとき



また $y = f(x) = x^3 - 6ax + 16$ は $y = x^3 - 6ax = x(x + \sqrt{6a})(x - \sqrt{6a})$ のグラフ (上の左図) を y 軸方向へ 16 だけ平行移動したものとみなすと、導関数の計算は不要となる。

(3) $a > 0 \Rightarrow n = 1$ または 2 または 3

$$a = 0 \Rightarrow n = 1$$

$$a < 0 \Rightarrow n = 1$$

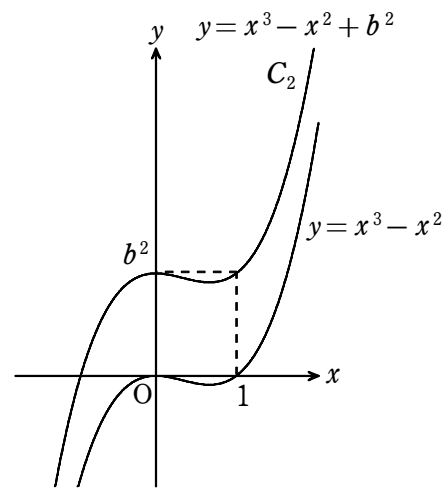
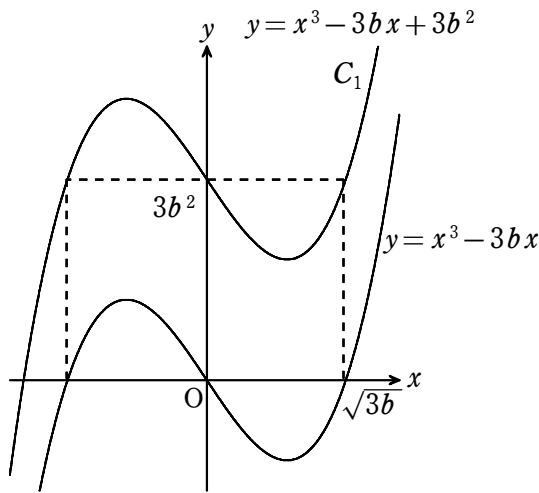
これらから正しいものは

$$\boxed{\text{㉑}} \quad a < 0 \Rightarrow n = 1 \quad \boxed{\text{㉒}} \quad n = 3 \Rightarrow a > 0$$

[2] $C_1: y=g(x)$, $C_2: y=h(x)$ の概形は考えておく。y 軸方向の平行移動を利用するとよい。

$$b > 0, \quad g(x) = x^3 - 3bx + 3b^2 = x(x + \sqrt{3b})(x - \sqrt{3b}) + 3b^2$$

$$h(x) = x^3 - x^2 + b^2 = x^2(x - 1) + b^2$$



y 軸上では $3b^2 > b^2$ だから $g > h$ \leftarrow 以下 $g(x)$, $h(x)$ を g , h と略記

概形から交点があるとすれば y 軸より右側、
よって右図が予想される。

$$g - h = x^2 - 3bx + 2b^2 = (x - b)(x - 2b)$$

したがって $\alpha = \boxed{b}$, $\beta = \boxed{2b}$

これらから

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} (h - g) dx \quad \text{②}$$

$$T = \int_{\beta}^t (g - h) dx \quad \text{①}$$

$$S - T = \int_{\alpha}^{\beta} (h - g) dx + \int_{\beta}^t (h - g) dx$$

$$= \int_{\alpha}^t (h - g) dx \quad \text{②}$$

$$= \int_{\alpha}^t (-x^2 + 3bx - 2b^2) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3bx^2}{2} - 2b^2x \right]_b^t = \left(-\frac{t^3}{3} + \frac{3bt^2}{2} - 2b^2t \right) - \left(-\frac{b^3}{3} + \frac{3b^3}{2} - 2b^3 \right)$$

$$= \frac{-1}{6} (2t^3 - 9bt^2 + 12b^2t - 5b^3) \quad \leftarrow U(t) \text{ とすると, } U(b) = 0$$

$$S - T = -\frac{1}{6} (t - b)^2 (2t - 5b) \quad \text{また } t > 2b$$

したがって、 $S = T$ すなわち $S - T = 0$ となるのは $t = \frac{5}{2}b$ のときである。

