

第5問

図を描いて考えるが、座標を設定しておくで、状況が明確になったり計算が楽なこともある。

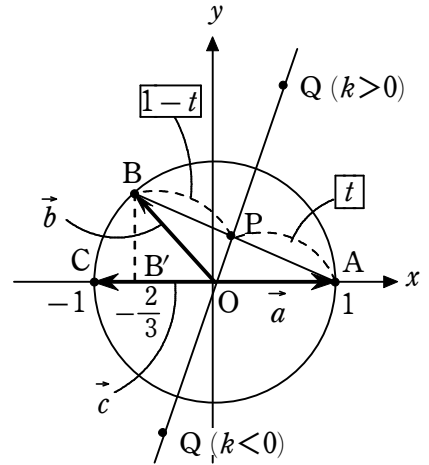
中心 O を原点にし、 $A(1, 0)$ としてみる。記述、計算の便宜のため、 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, \dots , $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$, \dots のように略記する。 O を中心とする半径1の円周上に、 A, B, C があるから

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos \angle AOB = -\frac{2}{3} \text{ から } \cos \angle AOB = -\frac{2}{3}$$

B の x 座標は $-\frac{2}{3}$, また $\vec{c} = -\vec{a}$ から $C(-1, 0)$

直線 OP 上の点 Q は O に関して P の側にあるとき $k > 0$, 反対側にあるとき $k < 0$ である。



(1) $\cos \angle AOB = \frac{-2}{3}$

$$\vec{q} = k\vec{p} = k\{(1-t)\vec{a} + t\vec{b}\} = \frac{\textcircled{1}}{(k-kt)} \vec{a} + \frac{\textcircled{0}}{kt} \vec{b} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\vec{CQ} = \vec{q} - \vec{c} = \vec{q} + \vec{a} = \frac{\textcircled{0}}{(k-kt+1)} \vec{a} + \frac{\textcircled{0}}{kt} \vec{b}$$

$\vec{a} \perp \vec{p}$ となるのは $\vec{a} \cdot \vec{p} = 0$ のときで

$$\vec{a} \cdot \vec{p} = (1-t)|\vec{a}|^2 + t\vec{a} \cdot \vec{b} = 1-t-\frac{2}{3}t = 1-\frac{5}{3}t \text{ よって } t = \frac{\textcircled{3}}{\textcircled{5}}$$

<別解> $\vec{a} \perp \vec{p}$ となるのは P が y 軸上にくるときで、このとき

$$AP : AB = AO : AB' \text{ から } t : 1 = 1 : \frac{5}{3} \text{ よって } t = \frac{\textcircled{3}}{\textcircled{5}}$$

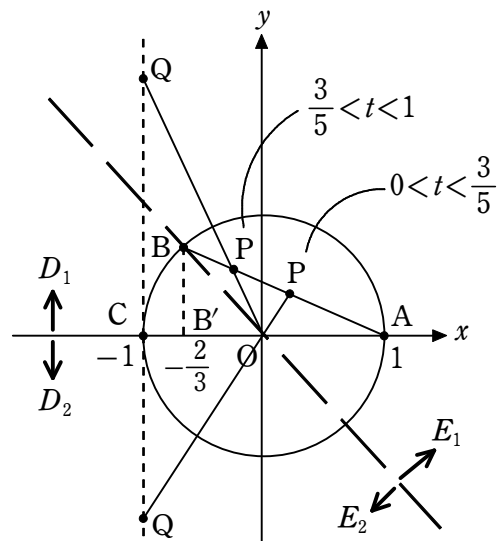
(2) $\angle OCQ$ が直角であるとき $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{CQ}$

$$\vec{a} \cdot \vec{CQ} = (k-kt+1)|\vec{a}|^2 + kt\vec{a} \cdot \vec{b} = (k-kt+1) - \frac{2}{3}kt = \left(1 - \frac{5}{3}t\right)k + 1 = 0$$

よって $k = \frac{\textcircled{3}}{\textcircled{5}t - \textcircled{3}} \dots\dots\dots \textcircled{2}$

$0 < t < \frac{3}{5}$ ならば Q は D_2 かつ E_2 に含まれる。 $\textcircled{3}$

$\frac{3}{5} < t < 1$ ならば Q は D_1 かつ E_1 に含まれる。 $\textcircled{0}$



(3) $t = \frac{1}{2}$ のとき $\vec{p} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

$$|\vec{p}|^2 = \frac{1}{4} |\vec{a} + \vec{b}|^2 = \frac{1}{4} (|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{4}{3} + 1\right) = \frac{1}{6} \quad \text{から} \quad |\vec{p}| = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

② より $k = -6$, ① より $\vec{q} = -6\vec{p}$ よって $|\vec{q}| = 6|\vec{p}| = \sqrt{\boxed{6}}$

このとき

$$\vec{CQ} = \vec{q} - \vec{c} = -6 \cdot \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \vec{a} = -2\vec{a} - 3\vec{b}$$

$$\vec{CR} = \boxed{-} \vec{CQ} = \boxed{2} \vec{a} + \boxed{3} \vec{b}$$

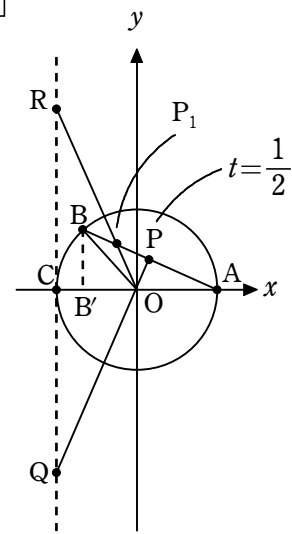
$$\vec{OR} = \vec{c} + \vec{CR} = -\vec{a} + (2\vec{a} + 3\vec{b}) = 4 \cdot \frac{\vec{a} + 3\vec{b}}{4}$$

$$\vec{OP}_1 = \frac{\vec{a} + 3\vec{b}}{4} \quad \text{とおくと}$$

$$\vec{OR} = 4 \vec{OP}_1$$

P_1 は AB を $3:1$ に内分する点だから、求める t の値は

$$\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$$



<参考>

直線 AB , CR の交点を D とする。

$t = \frac{1}{2}$ のとき P の位置は AB の中点で、これを M とすると

$OA = OB$ だから $OM \perp AB$

$$OB' = \frac{2}{3} \quad \text{から} \quad BB' = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{また} \quad AB' = \frac{5}{3} = \sqrt{5} BB', \quad AB = \sqrt{1 + (\sqrt{5})^2} BB' = \sqrt{6} BB'$$

$\triangle ABB'$ において $AB : BB' : AB' = \sqrt{6} : 1 : \sqrt{5}$

$\triangle ABB'$ と相似な三角形は多数ある。

$\triangle ADC$, $\triangle ACB$, $\triangle AOM$, $\triangle QOC (\equiv \triangle ROC)$

相似比から

$$OR = OQ = \sqrt{6}, \quad CR = CQ = \sqrt{5}, \quad CD = 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

AB , OR の交点を P_1 とし, $AP_1 : P_1B = t : 1-t$ とすると

$$AB : BD = AB' : B'C = \frac{5}{3} : \frac{1}{3} = 1 : \frac{1}{5} \quad \text{から} \quad AP_1 : P_1D = t : \frac{6}{5} - t$$

$\triangle ADC$ に直線 RO が交わるとして、メネラウスの定理を用いると

$$\frac{AP_1}{P_1D} \cdot \frac{DR}{RC} \cdot \frac{CO}{OA} = 1 \quad \text{から} \quad \frac{AP_1}{P_1D} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$3t = 5 \left(\frac{6}{5} - t \right) \quad \text{よって} \quad t = \frac{3}{4}$$

