

第5問 (選択問題) (配点 20)

平面上の点Oを中心とする半径1の円周上に、3点A, B, Cがあり、
 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{2}{3}$ および $\vec{OC} = -\vec{OA}$ を満たすとする。tを $0 < t < 1$ を満たす
 実数とし、線分ABを $t : (1-t)$ に内分する点をPとする。また、直線OP上
 に点Qをとる。

(1) $\cos \angle AOB = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

また、実数kを用いて、 $\vec{OQ} = k\vec{OP}$ と表せる。したがって

$\vec{OQ} = \boxed{\text{エ}} \vec{OA} + \boxed{\text{オ}} \vec{OB}$ ①

$\vec{CQ} = \boxed{\text{カ}} \vec{OA} + \boxed{\text{キ}} \vec{OB}$

となる。

\vec{OA} と \vec{OP} が垂直となるのは、 $t = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ のときである。

$\boxed{\text{エ}} \sim \boxed{\text{キ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | | |
|--------------|------------------|------------------|
| ① kt | ② $(k - kt)$ | ③ $(kt + 1)$ |
| ④ $(kt - 1)$ | ⑤ $(k - kt + 1)$ | ⑥ $(k - kt - 1)$ |

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

以下、 $t \neq \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ とし、 $\angle OCQ$ が直角であるとする。

(2) $\angle OCQ$ が直角であることにより、(1)の k は

$$k = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}t - \boxed{\text{シ}}} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

となることがわかる。

平面から直線 OA を除いた部分は、直線 OA を境に二つの部分に分けられる。そのうち、点 B を含む部分を D_1 、含まない部分を D_2 とする。また、平面から直線 OB を除いた部分は、直線 OB を境に二つの部分に分けられる。そのうち、点 A を含む部分を E_1 、含まない部分を E_2 とする。

- $0 < t < \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ ならば、点 Q は $\boxed{\text{ス}}$ 。
- $\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} < t < 1$ ならば、点 Q は $\boxed{\text{セ}}$ 。

$\boxed{\text{ス}}$ 、 $\boxed{\text{セ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- ① D_1 に含まれ、かつ E_1 に含まれる
- ② D_1 に含まれ、かつ E_2 に含まれる
- ③ D_2 に含まれ、かつ E_1 に含まれる
- ④ D_2 に含まれ、かつ E_2 に含まれる

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

数学Ⅱ・数学B

(3) 太郎さんと花子さんは、点Pの位置と $|\vec{OQ}|$ の関係について考えている。

$t = \frac{1}{2}$ のとき、①と②により、 $|\vec{OQ}| = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ とわかる。

太郎： $t \neq \frac{1}{2}$ のときにも、 $|\vec{OQ}| = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ となる場合があるかな。

花子： $|\vec{OQ}|$ を t を用いて表して、 $|\vec{OQ}| = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ を満たす t の値について考えればいいと思うよ。

太郎：計算が大変そうだね。

花子：直線OAに関して、 $t = \frac{1}{2}$ のときの点Qと対称な点をRとしたら、 $|\vec{OR}| = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ となるよ。

太郎： \vec{OR} を \vec{OA} と \vec{OB} を用いて表すことができれば、 t の値が求められそうだね。

直線OAに関して、 $t = \frac{1}{2}$ のときの点Qと対称な点をRとすると

$$\begin{aligned} \vec{CR} &= \boxed{\text{タ}} \vec{CQ} \\ &= \boxed{\text{チ}} \vec{OA} + \boxed{\text{ツ}} \vec{OB} \end{aligned}$$

となる。

$t \neq \frac{1}{2}$ のとき、 $|\vec{OQ}| = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ となる t の値は $\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。