

2024年度共通テスト 数学I・数学A

第1問

[1]

平方数 49, 64 ではさむ
 $2\sqrt{13} = \sqrt{52}$ であり $49 < 52 < 64$ の各辺の正の平方根をとると $7 < 2\sqrt{13} < 8$ であるから
 $n < 2\sqrt{13} < n+1$ …… ①

を満たす整数 n は ア である。

$$a = 2\sqrt{13} - 7 \quad \dots\dots ②$$

$$b = \frac{1}{a} = \frac{1}{2\sqrt{13} - 7} = \frac{2\sqrt{13} + 7}{(2\sqrt{13} - 7)(2\sqrt{13} + 7)} = \frac{\overset{\text{イ}}{\text{7}} + 2\sqrt{13}}{\underset{\text{ウ}}{\text{3}}} \quad \dots\dots ④$$

また

$$a = -7 + 2\sqrt{13}, \quad 3b = 7 + 2\sqrt{13} \quad \text{から}$$

$$a^2 - 9b^2 = (a+3b)(a-3b) = 4\sqrt{13} \cdot (-14) = \overset{\text{エオカ}}{\text{-56}} \sqrt{13}$$

$$\text{① から } \frac{7}{2} < \sqrt{13} < \frac{7+1}{2} \quad \dots\dots ⑤$$

$$7 < 2\sqrt{13} < 8 \quad \dots\dots ① \text{ と } ④ \text{ から } \frac{7+7}{3} < \frac{7+2\sqrt{13}}{3} < \frac{7+8}{3} \quad \text{すなわち } \frac{14}{3} < b < \frac{15}{3}$$

$\frac{m}{3} < b < \frac{m+1}{3}$ を満たす整数 m は キク である。 $a = \frac{1}{b}$ から

$$\frac{3}{15} < a < \frac{3}{14} \quad \dots\dots ⑥$$

$$\text{② から } \frac{3}{15} < 2\sqrt{13} - 7 < \frac{3}{14} \quad \text{ゆえに } \frac{18}{5} < \sqrt{13} < \frac{101}{28}, \quad \frac{101}{28} < 3.607 \quad \text{であるから}$$

$$3.6 < \sqrt{13} < 3.607$$

よって $\sqrt{13}$ の整数部分は ⑤ から ケ , 小数第1位の数字は コ ,

小数第2位の数字は サ である。

考 察

最後に $\sqrt{13}$ の近似値が小数第2位まで求まることにびっくりした。筆者は分母の有利化のこのような利用法を知らなかったので、少々考えてみた。全体の流れは以下の通り。

$\sqrt{52} (=2\sqrt{13})$ の整数部分は 7, 小数部分 a は

$$a = \sqrt{52} - 7$$

$$a \text{ の逆数の分母を有理化して } \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{52} + 7}{3} = \frac{(a+7) + 7}{3}$$

$$\text{右辺分子の } a \text{ を } 0 < a < 1 \text{ として評価すると } \frac{14}{3} < \frac{1}{a} < \frac{15}{3} \text{ から } \frac{3}{15} < a < \frac{3}{14}$$

$$\frac{3}{14} - \frac{3}{15} = \frac{1}{70} \text{ を } \sqrt{52} \text{ の誤差範囲と呼ぶと } \sqrt{13} \text{ のそれは } \frac{1}{140} \text{ となるので納得。}$$

以上のことを少し一般化して、平方根の近似計算を考える。

\sqrt{p} が整数でないとして、整数部分を n 、小数部分を a とする。すなわち

$$\sqrt{p} = n + a, \quad 0 < a < 1 \quad \dots\dots ①$$

上と同様にして

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{p} - n} = \frac{\sqrt{p} + n}{p - n^2} = \frac{a + 2n}{p - n^2} \quad \dots\dots ②$$

② の右辺に ① を用いると

$$\frac{2n}{p - n^2} < \frac{1}{a} < \frac{2n + 1}{p - n^2} \quad \text{から} \quad \frac{p - n^2}{2n + 1} < a < \frac{p - n^2}{2n} \quad \dots\dots ③$$

これが問題文中の ⑥ の一般化である。

これを第 1 段階として ① の代わりに

$$0 < b_1 < a < c_1 < 1 \quad \dots\dots ④, \quad b_1 = \frac{p - n^2}{2n + 1}, \quad c_1 = \frac{p - n^2}{2n}$$

を用いると

$$\frac{p - n^2}{2n + c_1} < a < \frac{p - n^2}{2n + b_1} \quad \dots\dots ⑤$$

$b_1 < \frac{p - n^2}{2n + c_1} < a < \frac{p - n^2}{2n + b_1} < c_1$ であるから、④ から ⑤ を繰り返し用いれば a の取り得る

値の範囲を絞り込むことができる。

② を修正して、漸化式

$$a_{n+1} = \frac{p - n^2}{a_n + 2n}, \quad a_1 = 0 \text{ または } 1$$

を考えると、 a_n は $\sqrt{p} - n$ に収束する。これと上の事柄はおそらく同じことなのだろう。