

第2問

(1) $f(x) = 3(x-1)(x-2)$

(i) $y = f(x)$ のグラフは右図, $y = f(x)$ 上の点 $(x, f(x))$ における接線の傾きが $f'(x)$ だから, $f'(x) = 0$ となる x の

値は $x = \frac{\text{ア} \boxed{3}}{\text{イ} \boxed{2}}$

(ii) $S(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x (3t^2 - \text{ウ} \boxed{9} t + \text{エ} \boxed{6}) dt$

$= \left[t^3 - \frac{9}{2} t^2 + 6t \right]_0^x = x^3 - \frac{\text{オ} \boxed{9}}{\text{カ} \boxed{2}} x^2 + \text{キ} \boxed{6} x$

$S'(x) = f(x) = 3(x-1)(x-2)$ だから $y = S(x)$ の増減表は右のようになる。

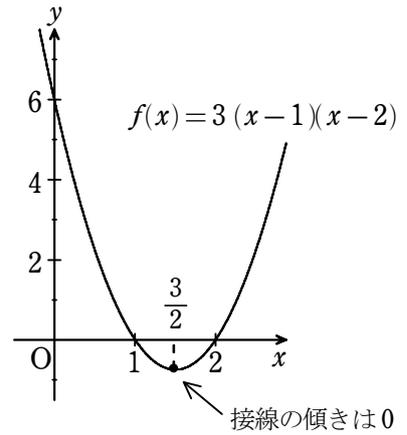
$x = \text{ク} \boxed{1}$ のとき, 極大値

$S(1) = 1^3 - \frac{9}{2} \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = \frac{\text{ケ} \boxed{5}}{\text{コ} \boxed{2}}$

$x = \text{サ} \boxed{2}$ のとき, 極小値

$S(2) = 2^3 - \frac{9}{2} \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 = \text{シ} \boxed{2}$ をとる。

(iii) $f(3) = S'(3)$ は関数 $y = S(x)$ のグラフ上の点 $(3, S(3))$ における接線の傾きである。...ス③



x	...	1	...	2	...
$S'(x) = f(x)$	+	0	-	0	+
$S(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

(2) $S(x) = \int_0^x 3(t-1)(t-m) dt$, $S'(x) = f(x) = 3(x-1)(x-m)$

$S_1 = \int_0^1 f(x) dx$, $S_2 = \int_1^m \{-f(x)\} dx$

$y = S(x)$ のグラフは, 原点 $(0, 0)$ を通り, $x=1$ で極大, $x=m$ で極小となる。(①または②または③)

$S_1 = S_2$ となるのは

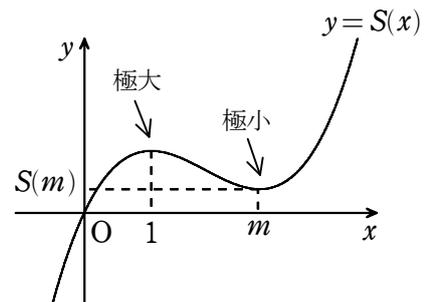
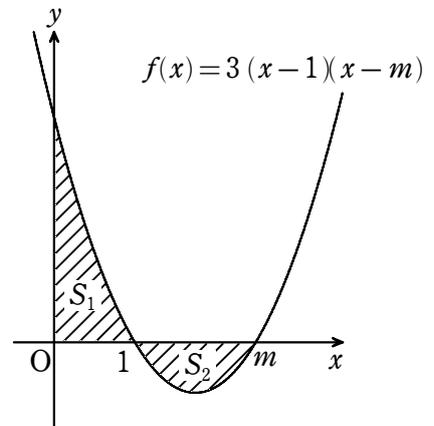
$S_1 - S_2 = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^m f(x) dx = \int_0^m f(x) dx = 0$

すなわち $S(m) = \int_0^m f(x) dx = 0$

$S_1 = S_2$ が成り立つような $f(x)$ に対する $y = S(x)$ の

グラフの概形はチ①

$S_1 > S_2$ のとき $S(m) > 0$ だからグラフの概形はツ②



(3) $y = f(x)$ のグラフは直線 $y = \frac{M+1}{2}$ に関して対称

すべての正の実数 p に対して

$$\int_{1-p}^1 f(x) dx = \int_m^{\frac{m+p}{2}} f(x) dx \quad \dots \textcircled{1}$$

$M = \frac{m+1}{2}$ とおくと

右図で面積 $T_1 = T_2$
ということ

$0 < q \leq M-1$ であるすべての実数 q に対して

このとき $1 \leq M-q < M$

$$\int_{M-q}^M \{-f(x)\} dx = \int_M^{M+q} \{-f(x)\} dx \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。

右図で面積 $T_3 = T_4$
ということ

すべての実数 a, b に対して

$$\int_a^\beta f(x) dx = S(\beta) - S(a), \quad \int_a^\beta \{-f(x)\} dx = S(a) - S(\beta)$$

が成り立つことから、①は

$$S(1) - S(1-p) = S(m+p) - S(m) \quad \text{から}$$

$$S(1-p) + S(m+p) = \boxed{S(1) + S(m)} \quad \leftarrow \textcircled{0} \quad \dots (*)$$

②は

$$S(M-q) - S(M) = S(M) - S(M+q) \quad \text{から}$$

$$2S(M) = \boxed{S(M+q) + S(M-q)} \quad \leftarrow \textcircled{4} \quad \dots (**)$$

(**) は $q = M-1$ のとき

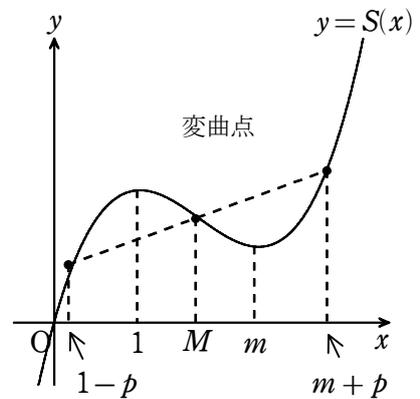
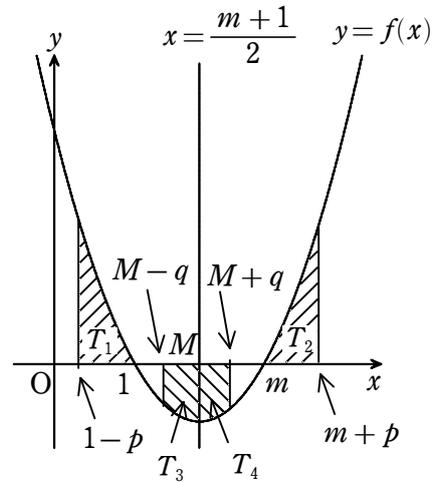
$$2S(M) = S(2M-1) + S(1) \quad \text{すなわち} \quad 2S\left(\frac{m+1}{2}\right) = S(m) + S(1)$$

$$(*) \text{ と } (**) \text{ から} \quad \frac{S(1-p) + S(m+p)}{2} = S\left(\frac{m+1}{2}\right)$$

以上から、すべての正の実数 p に対して、

2点 $(1-p, S(1-p)), (m+p, S(m+p))$ を結ぶ線分の中点は $\left(\frac{m+1}{2}, S\left(\frac{m+1}{2}\right)\right)$ となり

p の値によらず一つに定まり、関数 $y = S(x)$ のグラフ上にある。 ← ネ⑦



ネ の結論を導くのに (*) と (**) を用いるのは難しい。

結局、3次関数 $y = S(x)$ は変曲点に関して点対称であると考えれば容易。