

数学Ⅱ・数学B

第2問 (必答問題) (配点 30)

$m$  を  $m > 1$  を満たす定数とし、 $f(x) = 3(x-1)(x-m)$  とする。また、 $S(x) = \int_0^x f(t) dt$  とする。関数  $y = f(x)$  と  $y = S(x)$  のグラフの関係について考えてみよう。

(1)  $m = 2$  のとき、すなわち、 $f(x) = 3(x-1)(x-2)$  のときを考える。

(i)  $f'(x) = 0$  となる  $x$  の値は  $x = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$  である。

(ii)  $S(x)$  を計算すると

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_0^x (3t^2 - \boxed{\text{ウ}}t + \boxed{\text{エ}}) dt \\ &= x^3 - \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}x^2 + \boxed{\text{キ}}x \end{aligned}$$

であるから

$x = \boxed{\text{ク}}$  のとき、 $S(x)$  は極大値  $\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$  をとり

$x = \boxed{\text{サ}}$  のとき、 $S(x)$  は極小値  $\boxed{\text{シ}}$  をとることがわかる。

(数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。)

(iii)  $f(3)$ と一致するものとして、次の①～④のうち、正しいものは  である。

の解答群

- ①  $S(3)$
- ② 2点 $(2, S(2))$ ,  $(4, S(4))$ を通る直線の傾き
- ③ 2点 $(0, 0)$ ,  $(3, S(3))$ を通る直線の傾き
- ④ 関数 $y = S(x)$ のグラフ上の点 $(3, S(3))$ における接線の傾き
- ⑤ 関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $(3, f(3))$ における接線の傾き

(数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。)

## 数学Ⅱ・数学B

(2)  $0 \leq x \leq 1$  の範囲で、関数  $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸および  $y$  軸で囲まれた図形の面積を  $S_1$ 、 $1 \leq x \leq m$  の範囲で、関数  $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸で囲まれた図形の面積を  $S_2$  とする。このとき、 $S_1 = \boxed{\text{セ}}$ 、 $S_2 = \boxed{\text{ソ}}$  である。

$S_1 = S_2$  となるのは  $\boxed{\text{タ}} = 0$  のときであるから、 $S_1 = S_2$  が成り立つような  $f(x)$  に対する関数  $y = S(x)$  のグラフの概形は  $\boxed{\text{チ}}$  である。また、 $S_1 > S_2$  が成り立つような  $f(x)$  に対する関数  $y = S(x)$  のグラフの概形は  $\boxed{\text{ツ}}$  である。

$\boxed{\text{セ}}$ 、 $\boxed{\text{ソ}}$  の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

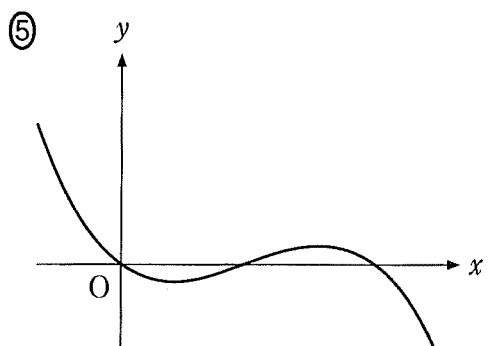
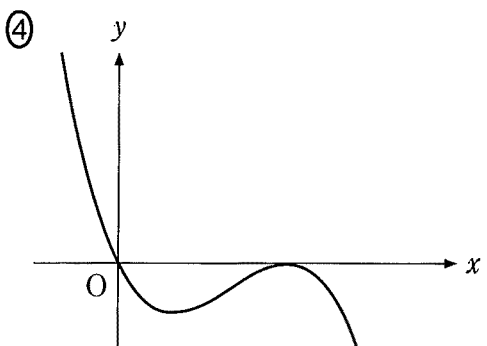
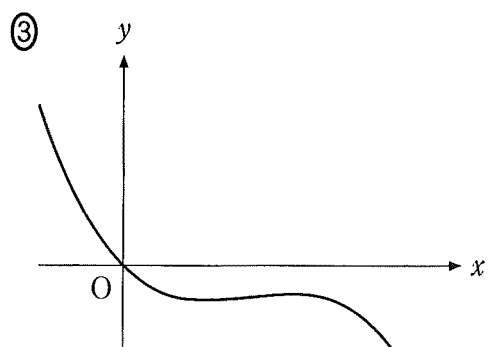
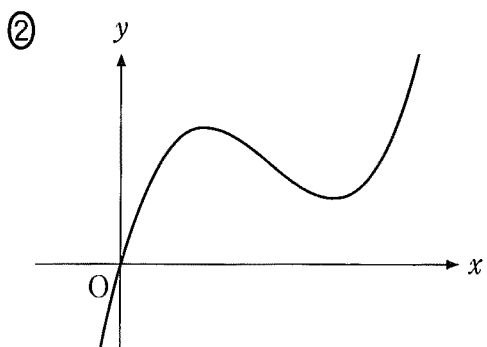
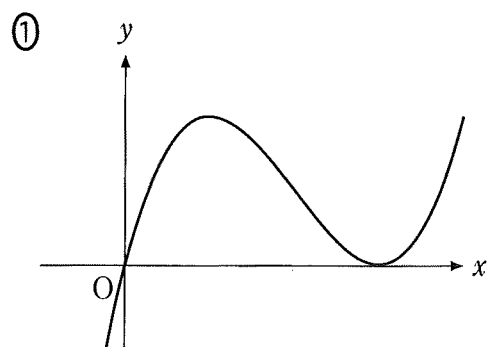
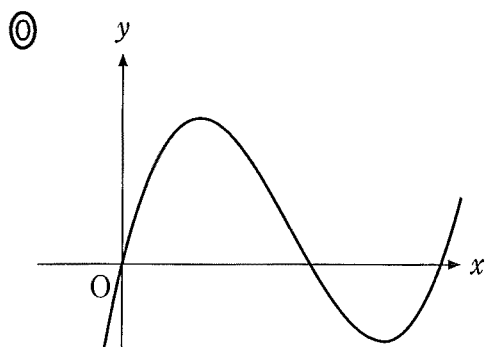
$\textcircled{0} \int_0^1 f(x) dx$	$\textcircled{1} \int_0^m f(x) dx$	$\textcircled{2} \int_1^m f(x) dx$
$\textcircled{3} \int_0^1 \{-f(x)\} dx$	$\textcircled{4} \int_0^m \{-f(x)\} dx$	$\textcircled{5} \int_1^m \{-f(x)\} dx$

$\boxed{\text{タ}}$  の解答群

$\textcircled{0} \int_0^1 f(x) dx$	$\textcircled{1} \int_0^m f(x) dx$
$\textcircled{2} \int_1^m f(x) dx$	$\textcircled{3} \int_0^1 f(x) dx - \int_0^m f(x) dx$
$\textcircled{4} \int_0^1 f(x) dx - \int_1^m f(x) dx$	$\textcircled{5} \int_0^1 f(x) dx + \int_0^m f(x) dx$
$\textcircled{6} \int_0^m f(x) dx + \int_1^m f(x) dx$	

(数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。)

㊦, ㊧については, 最も適当なものを, 次の㊰~㊵のうちから一つずつ選べ。ただし, 同じものを繰り返し選んでもよい。



(数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。)

## 数学Ⅱ・数学B

(3) 関数  $y = f(x)$  のグラフの特徴から関数  $y = S(x)$  のグラフの特徴を考えてみよう。

関数  $y = f(x)$  のグラフは直線  $x = \boxed{\text{テ}}$  に関して対称であるから、すべての正の実数  $p$  に対して

$$\int_{1-p}^1 f(x) dx = \int_m^{\boxed{\text{ト}}} f(x) dx \quad \dots\dots\dots \text{①}$$

が成り立ち、 $M = \boxed{\text{テ}}$  とおくと  $0 < q \leq M - 1$  であるすべての実数  $q$  に対して

$$\int_{M-q}^M \{-f(x)\} dx = \int_M^{\boxed{\text{ナ}}} \{-f(x)\} dx \quad \dots\dots\dots \text{②}$$

が成り立つことがわかる。すべての実数  $\alpha, \beta$  に対して

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = S(\beta) - S(\alpha)$$

が成り立つことに注意すれば、①と②はそれぞれ

$$S(1-p) + S(\boxed{\text{ト}}) = \boxed{\text{ニ}}$$

$$2S(M) = \boxed{\text{ヌ}}$$

となる。

以上から、すべての正の実数  $p$  に対して、2点  $(1-p, S(1-p))$ ,  $(\boxed{\text{ト}}, S(\boxed{\text{ト}}))$  を結ぶ線分の midpoint についての記述として、後の④～⑤のうち、最も適当なものは  $\boxed{\text{ネ}}$  である。

(数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。)

テ の解答群

- ①  $m$                       ②  $\frac{m}{2}$                       ③  $m+1$                       ④  $\frac{m+1}{2}$

ト の解答群

- ①  $1-p$                       ②  $p$                       ③  $1+p$   
 ④  $m-p$                       ⑤  $m+p$

ナ の解答群

- ①  $M-q$                       ②  $M$                       ③  $M+q$   
 ④  $M+m-q$                       ⑤  $M+m$                       ⑥  $M+m+q$

ニ の解答群

- ①  $S(1)+S(m)$                       ②  $S(1)+S(p)$                       ③  $S(1)-S(m)$   
 ④  $S(1)-S(p)$                       ⑤  $S(p)-S(m)$                       ⑥  $S(m)-S(p)$

ヌ の解答群

- ①  $S(M-q)+S(M+m-q)$                       ②  $S(M-q)+S(M+m)$   
 ③  $S(M-q)+S(M)$                       ④  $2S(M-q)$   
 ⑤  $S(M+q)+S(M-q)$                       ⑥  $S(M+m+q)+S(M-q)$

ネ の解答群

- ①  $x$  座標は  $p$  の値によらず一つに定まり,  $y$  座標は  $p$  の値により変わる。  
 ②  $x$  座標は  $p$  の値により変わり,  $y$  座標は  $p$  の値によらず一つに定まる。  
 ③ 中点は  $p$  の値によらず一つに定まり, 関数  $y = S(x)$  のグラフ上にある。  
 ④ 中点は  $p$  の値によらず一つに定まり, 関数  $y = f(x)$  のグラフ上にある。  
 ⑤ 中点は  $p$  の値によって動くが, つねに関数  $y = S(x)$  のグラフ上にある。  
 ⑥ 中点は  $p$  の値によって動くが, つねに関数  $y = f(x)$  のグラフ上にある。