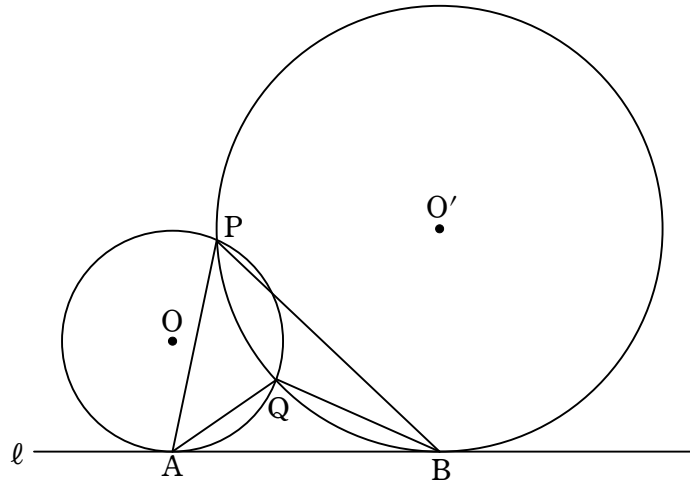


第1問 [2]



- (1) $AH = \boxed{2} \sin \alpha$
 $PA = 2AH = \boxed{4} \sin \alpha \dots\dots ①$
 $BH' = 4 \sin \beta$ から
 $PB = 2BH' = \boxed{8} \sin \beta \dots\dots ②$

$\triangle PAB$ の外接円の半径を R_1 とおくと、

$$\frac{PA}{\sin \beta} = \frac{PB}{\sin \alpha} = 2R_1$$

から $\sin \beta = \frac{PA}{2R_1}$ $\sin \alpha = \frac{PB}{2R_1}$

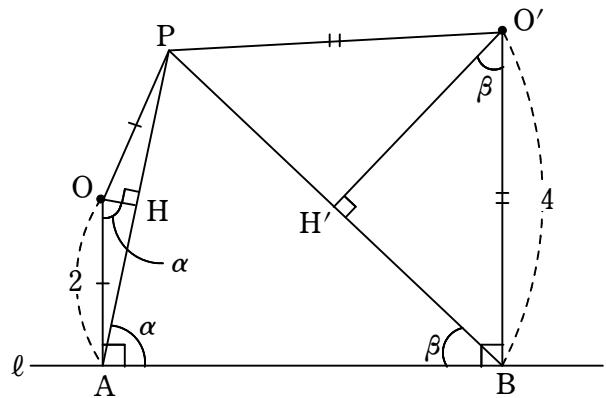
$$PA \sin \alpha = PB \sin \beta \dots\dots (*)$$

この式に、①と②を代入して $4 \sin^2 \alpha = 8 \sin^2 \beta$

$$\sin \alpha = \sqrt{2} \sin \beta$$

これと(*)から $PB = \sqrt{2} PA$, ①から $PB = 4\sqrt{2} \sin \alpha$

$$2R_1 = \frac{PB}{\sin \alpha} = 4\sqrt{2} \text{ よって } R_1 = \boxed{2} \sqrt{2}$$



- (2) 右図のように $\angle QAB = \alpha'$, $\angle QBA = \beta'$ とし、

(1) と同様に計算を進めると、各式において

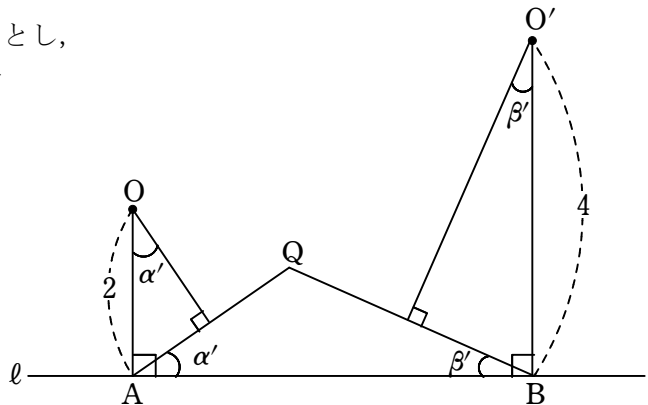
$$P \rightarrow Q, \alpha \rightarrow \alpha', \beta \rightarrow \beta', R_1 \rightarrow R_2$$

と置き換えた式が成り立つから

$$R_1 = R_2$$

$$\sin \angle APB = \sin \angle AQB$$

である。



(3)

$$\frac{AB}{\sin \angle APB} = 2R_1 \quad \text{から}$$

$$\sin \angle APB = \frac{AB}{2R_1} = \frac{2\sqrt{7}}{2 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\text{トナ}} \boxed{14}}{\boxed{4}}$$

$$\text{これから } \cos^2 \angle APB = 1 - \sin^2 \angle APB = \frac{2}{16}$$

$\angle APB$ は鋭角だから $\cos \angle APB > 0$ であり

$$\cos \angle APB = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$PA = x$ とおくと $PB = \sqrt{2}x$, 余弦定理を用いると

$$x^2 + (\sqrt{2}x)^2 - 2x \cdot \sqrt{2}x \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = (2\sqrt{7})^2 \quad \text{から } 2x^2 = 28$$

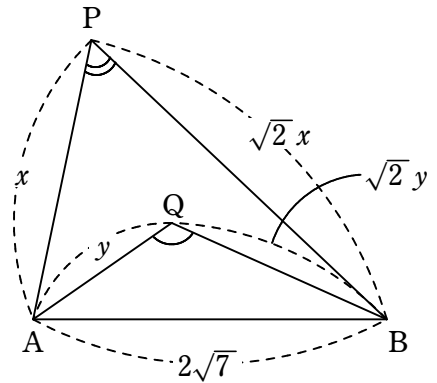
$$x = PA = \sqrt{\text{ヌネ}} \boxed{14}$$

$\sin \angle AQB = \sin \angle APB$ であり, $\angle AQB$ は鈍角だから $\cos \angle AQB < 0$ であり

$$\cos \angle AQB = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$QA = y$ とおくと $QB = \sqrt{2}y$, 余弦定理から $4y^2 = 28$

$$y = QA = \sqrt{7}$$



(2) の補足

接弦定理を用いると

$$\angle APQ = \angle QAB, \quad \angle BPQ = \angle QBA$$

から

$$\angle APQ + \angle BPQ = \angle QAB + \angle QBA$$

$$\angle APB = 180^\circ - \angle AQB$$

これから

$$\sin \angle APB = \sin \angle AQB$$

また, ℓ に関して Q と対称な点を

Q' とすると

$$\angle APB + \angle AQ'B = 180^\circ$$

であるから, 4点 A, P, B, Q' は

同一円周上にある。すなわち $\triangle APB$ と

$\triangle AQ'B$ の外接円は一致し, したがって

$\triangle APB$ と $\triangle AQB$ の外接円の半径は等しい。

