

第1問 [2]

解答例 (1)

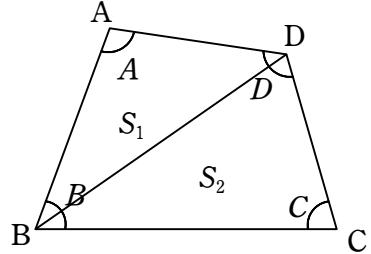
$$S_1 = \frac{\sqrt{AB \cdot AD}}{2} \sin A, \quad S_2 = \frac{\sqrt{BC \cdot CD}}{2} \sin C$$

 $A + C = B + D$ を満たすとき, $(A + C) + (B + D) = 360^\circ$ だから

$$A + C = \boxed{180^\circ}$$

このとき $\sin C = \sin(180^\circ - A) = \sin A$ から

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\sqrt{AB \cdot AD + BC \cdot CD}}{2} \sin A \quad \dots \dots \textcircled{1}$$



感想 ①式の成り立つ条件 $A + C = 180^\circ$ は、円に内接する四角形を予想させますが、(2) でみる
ように予想は外れです。正解を解答群から探すのは意外と神経を使います。

解答例 (2)

(i) 四角形 PMOK の面積は

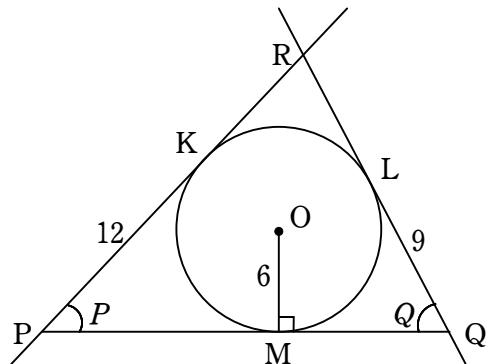
$$\triangle PMO + \triangle PKO = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 \times 2 = \boxed{72}$$

$$\textcircled{1} \text{ から } 72 = \frac{12^2 + 6^2}{2} \sin P \text{ よって}$$

$$\sin P = \frac{72}{90} = \frac{4}{5}$$

四角形 QLOM についても同様にして

$$\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6 \times 2 = \frac{9^2 + 6^2}{2} \sin Q \text{ から } \sin Q = \frac{12}{13}$$

 $\triangle PQR$ において正弦定理を用いると

$$PR : QR = \sin Q : \sin P = \frac{12}{13} : \frac{4}{5} = \boxed{15} : \boxed{13}$$

 $RK = RL = x$ とする

$$(x+12) : (x+9) = 15 : 13 \text{ から } x = RL = \frac{21}{2}$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 6 \times 2 = \frac{(4\sqrt{2})^2 + 6^2}{2} \sin P \text{ から } \sin P = \frac{12\sqrt{2}}{17}$$

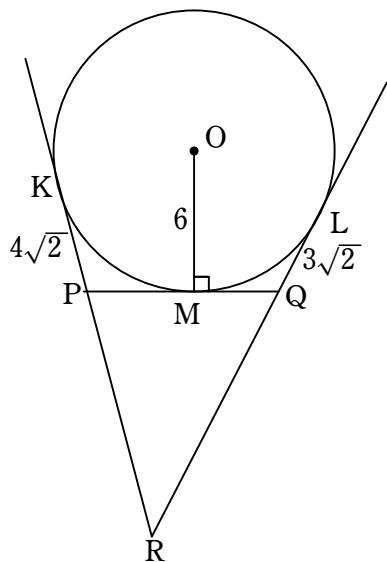
$$\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 6 \times 2 = \frac{(3\sqrt{2})^2 + 6^2}{2} \sin Q \text{ から } \sin Q = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

 $\sin(180^\circ - P) = \sin P, \sin(180^\circ - Q) = \sin Q$ を考慮して $\triangle PQR$ において正弦定理を用いると

$$PR : QR = \sin Q : \sin P = \frac{2\sqrt{2}}{3} : \frac{12\sqrt{2}}{17} = 17 : 18$$

 $RK = RL = x$ すると $(x - 4\sqrt{2}) : (x - 3\sqrt{2}) = 17 : 18$

$$x = RL = \frac{21}{2} \sqrt{\frac{2}{17}}$$

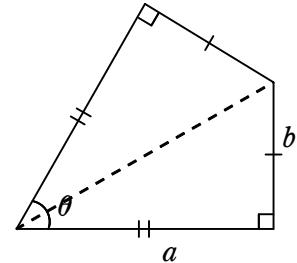


感想 線分 PQ に接する円 O に P, Q から接線を引いて三角形 PQR をつくる。 PQ が十分長ければ円 O は内接円になり、短ければ傍接円になるという状況でしょう。その流れからみて、細かいことですが、(i) で「 $PK=12, QL=9$ であるとき」とあってなぜ「 $PM=12, QM=9$ 」ではないのか、ふと立ち止まって考えてしまいました。

① 式は予想に反し右図のような図形で、 a, b から θ を計算するのに使うんですね。なるほどなと思いましたが、あまりに繰り返し使わせられるとさすがに面倒に感じました。

$$\frac{1}{2}ab \times 2 = \frac{a^2 + b^2}{2} \sin \theta \text{ から } \sin \theta = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

まずこれを最初に与えてもらひたかったです。4回も同じ計算をした後で、公式化すればよかったですと気付きました。



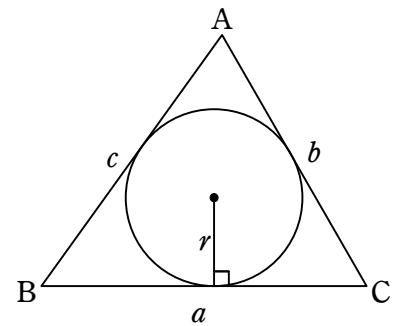
式自体は2倍角の公式を使って $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \frac{\theta}{2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

から導けます。

次の RL の長さを求める段階が難関でした。内接円の半径が出ていて、三角形の辺の長さを考えるとすれば、右図での公式

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}r(a + b + c) \quad \dots \dots (*)$$

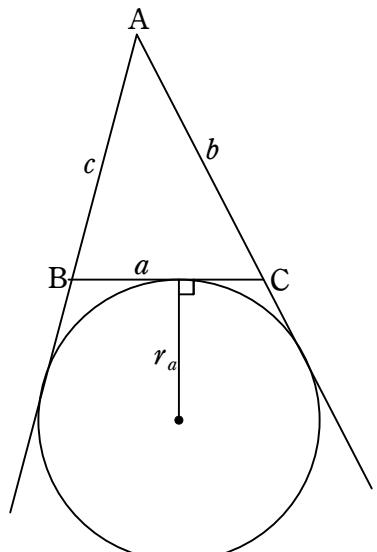
がまず第一感でしょう。それをなぜ $\sin Q$ も求めるのか、 $PR : QR$ はどこから、四角形 $PMOK$ から $\triangle PQR$ に視点を移すのに時間がかかってしまいました。



(ii) では傍接円になるので (*) 式は

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}r_a(-a + b + c)$$

のようになりますが、これが難しいので、(i) と同様にやればよいということでしょうか。それでも P, Q は $\triangle PQR$ の外角の大きさなので、一概に同様にとはいかないように思われます。むしろ (i), (ii) の違いを焦点にした問題もあり得るのではと思いました。



自分なりに自由に考えて解きたいところを、やはり出題者の誘導を素早く解釈し、それにうまくのって計算をどんどん進めていかないと時間的に厳しいようです。共通テストもいろいろ変化してきていますが、マークシート方式の限界でしょうか。ChatGPT に解かせたところ満点をとったというニュースがありました、逆に AI に採点させるようになれば状況は良くなるのでしょうか。